UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

GUSTAVO CANCELIER

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Blumenau

2019

Gustavo Cancelier

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu

Blumenau

2019

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 10:49h do dia 18 de julho de 2019.

Cancelier, Gustavo
Uma Introdução à Teoria da Medida e Integração : / Gustavo Cancelier; Orientador, Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu; - Blumenau, 10:49, 18 de julho de 2019.
82 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Medida. 2. Integração. 3. Integral de Lebesgue. 4. Integral de Riemann. I. Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu II. Curso de Licenciatura em Matemática III. Título.

Gustavo Cancelier

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 18 de julho de 2019.

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Maicon José Benvenutti
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Este trabalho é dedicado a todos que se interessam, valorizam e apoiam a educação.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Gilmar e Rosemeri somente palavras não seriam suficientes para demonstrar minha gratidão. Estiveram presentes em todos os momentos de minha vida e com certeza sem eles não teria sido tão fácil. O mesmo se emprega na parceria de meus irmãos Junior e Gabriel.

Agradeço aos avós, verdadeiros de exemplos para minha vida. Não poderia me esquecer dos estimados padrinhos, abençoadas tias, queridos tios e primos, que sempre estiveram ao meu lado.

Deixo uma singela homenagem aos colegas de graduação. Agradeço por tornarem tudo mais fácil, foram diversas noites que passaram muito rápido. Em especial, agradeço à Ana pelo companheirismo e compreensão e ao Fábio e a Diana, por me acompanharem em todas as disciplinas da graduação. Agradeço ainda, aos amigos que estiveram ao meu lado dentro e fora da universidade, vivendo momentos únicos.

Professores, você são demais! Sua dedicação, proximidade e olhar humano para os estudantes me formaram o professor que sou. Em especial, agradeço ao professor Rafael Abreu, que com certeza, foi o que mais dedicou o seu tempo para minha formação. Não somente nas orientações de iniciação científica e deste trabalho, mas nas várias aulas complementares, quase que particulares, para sanar minhas dúvidas.

Agradeço a Deus, por me acompanhar em muitas madrugadas de estudo, por colocar todas estas pessoas especiais em minha vida e por me dar forças quando precisei.

"Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e derrepente você estará fazendo o impossível."

São Francisco de Assis

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução à Teoria da Medida e Integração, proposta por Henri Léon Lebesgue. Estudamos conceitos, propriedades e resultados importantes relacionados a esta teoria. Entre outras coisas, este trabalho apresenta ainda um breve estudo sobre a Teoria de Integração proposta por Bernhard Riemann, contempla a comparação de resultados e propriedades entre as duas teorias verificando qual delas possui mais vantagens em termos de propriedades e gama de funções a serem integráveis.

Palavras-chaves: Medida. Integração. Integral de Lebesgue. Integral de Riemann.

ABSTRACT

This monography presents an introduction to Measure Theory and Integration, proposed by Henri Léon Lebesgue. We study important concepts, properties and results related to this theory. This work also presents a brief study about the Integration Theory proposed by Bernhard Riemman, comparing both theories and verifying which one has more advantages in terms or properties and range of integrable functions.

Keywords: Measure. Integration. Integral of Lebesgue. Integral of Riemann.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de integração, desenvolvida ao longo de anos, inicialmente era mais preocupada com aplicações mecânicas da integral e com o passar do tempo a teoria desenvolveu-se com o estudo de condições para uma função ser dita integrável.

Foram desenvolvidas algumas teorias que geralmente eram compostas por definições e resultados que permitiam a integração de uma nova classe de funções. Todos esses esforços levaram a chamada teoria clássica de integração, proposta por Bernhard Riemann em 1854.

A teoria de integração de Riemann foi o primeiro objeto de estudo para este trabalho, que ocorreu durante minha iniciação científica. Neste estudo, utilizamos [3] como referência principal e [4] como referência secundária. Estudamos a Integral de Riemann nos olhares da Análise, o que seria a continuação da disciplina Introdução a Análise Real de minha graduação. Este estudo foi sitematizado e é apresentado no Apêndice A deste trabalho.

Em 1902, Henri Léon Lebesgue publicou sua tese de doutorado intitulada "Integral, medida e área". Sua tese tratava de um novo método de integração que abrange mais funções que a integral de Riemann.

Para o estudo da Integral de Lebesgue, objetivo principal deste trabalho, utilizamos a referência [1]. Por tratar-se de uma referência escrita na lingua inglesa, realizamos a tradução de parte do livro, verificamos e refazemos as demonstrações cuidadosamente. Esse estudo foi sistematizado e encontra-se nos capítulos 2, 3, 4 e 5 deste trabalho.

Visto que a definição da Integral de Lebesgue é algo bastante construtivo, nos capítulos 2 e 3 introduzimos algumas definições e resultados importantes que servem de alicerce para as definições de integral que apresentamos nos dois capítulos seguintes. Especificamente, nos capítulos 4 e 5 definimos integral, estudamos propriedades e enunciamos e provamos os principais resultados relativos a esta teoria.

Em Matemática, é natural questionar se um conjunto de funções em questão é um espaço normado. No Apêndice B deste trabalho, tratamos sobre o espaço L_1, que é um espaço normado construído a partir do conjunto das funções Lebesgue integráveis

As demonstrações foram realizadas "passo a passo", na tentativa de deixar o trabalho auto contido e com o mínimo de pré requisitos; porém, se faz necessário um conhecimento prévio sobre Análise Real. Para o leitor interessado, sugere-se as referencias [3] e [4].

2 FUNÇÕES MENSURÁVEIS

A definição da Integral de Lebesgue é bastante construtiva, neste capítulo definiremos e verificaremos propriedades que são fundamentais para defirmos a integral. Porém, a definição da Integral de Lebesgue será apresentada apenas nos Capítulos 4 e 5.

Definição 2.1. Uma família $\sigma(X)$ de subconjuntos do conjunto X é dita σ-álgebra quando satisfaz:

1. $\emptyset, X \in \sigma(X)$;
2. Dado $A \in \sigma(X)$, o complementar $X \backslash A \in \sigma(X)$;
3. Dada uma sequência (A_n) de conjuntos em $\sigma(X)$, a união $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(X)$.

Neste caso, o par $(X, \sigma(X))$ é chamado de espaço mensurável e todo conjunto $A \in \sigma(X)$ é chamado conjunto mensurável. Por simplicidade, quando a σ-álgebra de X está fixada, o conjunto será chamado mensurável.

Exemplo 2.1. Seja X um conjunto qualquer. Se $\sigma(X)$ é o conjunto $\mathscr{P}(X)$ das partes de X, então $\sigma(X)$ é uma σ-álgebra. De fato, é evidente que $\emptyset, X \in \mathscr{P}(X)$. Além disso, dado arbitrariamente $A \in \mathscr{P}(X)$, é imediato que $X \backslash A \in \mathscr{P}(X)$. Por fim, dada uma sequência (A_n) em $\mathscr{P}(X)$, temos que $A_n \subset X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset X$, ou seja, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{P}(X)$.

Exemplo 2.2. Seja $X = \mathbb{N}$. Temos que o conjunto

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \{1, 3, 5, \ldots\}, \{2, 4, 6, \ldots\}, X\}$$

é uma σ-álgebra.

Exemplo 2.3. Seja $(\sigma_\lambda(X))_{\lambda\in L}$ uma família qualquer de σ-álgebras de X. Temos que $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in L} \sigma_\lambda(X)$ é uma σ-álgebra de X. De fato, é evidente que $X, \emptyset \in \displaystyle\bigcap_{\lambda\in L} \sigma_\lambda(X)$. Além disso, dado $A \in \displaystyle\bigcap_{\lambda\in L} \sigma_\lambda(X)$, é imediato que $X \backslash A \in \bigcap_{\lambda \in L} \sigma_\lambda(X)$. Por fim, dada uma sequência (A_n) em $\bigcap_{\lambda \in L} \sigma_\lambda(X)$, temos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{\lambda \in L} \sigma_\lambda(X)$.

Proposição 2.1. *Se τ é uma coleção não vazia de subconjuntos de X, então existe uma σ-álgebra $\sigma(X;\tau)$ de X que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\tau \subset \sigma(X;\tau)$;*
2. *Se $\sigma(X)$ é uma σ-álgebra de X tal que $\tau \subset \sigma(X)$, então $\sigma(X;\tau) \subset \sigma(X)$.*

Demonstração. Seja $(\sigma_\lambda(X))_{\lambda \in L}$ a família das σ-álgebras de X que contém τ. Temos que esta família é não vazia, pois $\mathscr{P}(X)$ é uma σ-álgebra de X que contém τ. Considerando $\sigma(X;\tau) := \bigcap_{\lambda \in L} \sigma_\lambda(X)$, temos que $\sigma(X;\tau)$ é uma σ-álgebra de X que evidentemente satisfaz as propriedades 1 e 2.

$\blacksquare$

Definição 2.2. A σ-álgebra $\sigma(\mathbb{R};\tau)$, em que $\tau = \{(a,b) \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$, é denominada álgebra de Borel e denotada por $\mathbf{B}$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito um conjunto de Borel se $A \in \mathbf{B}$.

Observação 2.1. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita Borel mensurável quando $X = \mathbb{R}$ e $\sigma(X) = \mathbf{B}$.

No que segue, vamos denotar por $\overline{\mathbb{R}}$ o conjunto dos números reais estendidos, ou seja, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Exemplo 2.4. Seja $X = \overline{\mathbb{R}}$ o conjunto dos números reais estendidos e consideremos

$$E_1 := \{E \cup \{-\infty\} \;:\; E \in \mathbf{B}\},$$

$$E_2 := \{E \cup \{+\infty\} \;:\; E \in \mathbf{B}\} \text{ e}$$

$$E_3 := \{E \cup \{-\infty, +\infty\} \;:\; E \in \mathbf{B}\},$$

em que $\mathbf{B}$ é a álgebra de Borel. Temos que $\overline{\mathbf{B}} := \mathbf{B} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$ é uma σ-álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$ e é chamada de álgebra de Borel estendida.

Definição 2.3. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável quando

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \sigma(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Proposição 2.2. *Toda função constante é mensurável.*

Demonstração. Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = c$, para todo $x \in X$. Se $\alpha \geq c$, então $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \sigma(X)$. Se $\alpha < c$, então $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X \in \sigma(X)$. Concluímos com isto que $\{x \in X \ : \ f(x) > \alpha\} \in \sigma(X)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, f é mensurável. ■

O seguinte lema mostra que existem outras maneiras equivalentes de se definir função mensurável.

Lema 2.3. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma(X)$ uma σ-álgebra de X. As afirmações a seguir são equivalentes:*

1. $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
2. $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $A_\alpha \in \sigma(X)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então $B_\alpha = X \backslash A_\alpha \in \sigma(X)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $B_\alpha \in \sigma(X)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então $A_\alpha = X \backslash B_\alpha \in \sigma(X)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Com isto concluímos as equivalências entre as afirmações 1 e 2.

Similarmente mostra-se que as afirmações 3 e 4 são equivalentes.

Vamos agora mostrar que as afirmações 1 e 3 são equivalentes. De fato, se a afirmação 1 ocorre, então dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \sigma(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $C_\alpha = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \sigma(X)$, ou seja, ocorre a afirmação 3. Por outro lado, se a afirmação 3 ocorre, então dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \sigma(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $A_\alpha = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \sigma(X)$, ou seja, ocorre a afirmação 1.

■

Proposição 2.4. *Sejam $E \in \sigma(X)$ e $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ a função característica definida por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & se\, x \in E \\ 0, & se\, x \notin E \end{cases}$$

Temos que χ_E é mensurável.

Demonstração. Se $\alpha \geq 1$, então $\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = \emptyset \in \sigma(X)$. Se $0 \leq \alpha < 1$, então $\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = E \in \sigma(X)$. Por fim, se $\alpha < 0$, então $\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = X \in \sigma(X)$. ■

Exemplo 2.5. Seja $X = \mathbb{R}$ e consideremos $\sigma(X) = \mathbf{B}$. Temos que toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável. De fato, como f é contínua para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ é aberto e consequentemente é a união de uma sequência de intervalos abertos. Por isso o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathbf{B}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.6. Seja $X = \mathbb{R}$ e consideremos $\sigma(X) = \mathbf{B}$. Temos que toda função monótona crescente é Borel mensurável. De fato, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ é um intervalo da forma $[a, +\infty)$, que pertence a $\mathbf{B}$.

Proposição 2.5. *Seja $c \in \mathbb{R}$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, então $(c \cdot f) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. No caso em que $c = 0$, temos que $(c \cdot f) : X \to \mathbb{R}$ é a função definida por $(c \cdot f)(x) = 0$, para todo $x \in X$, ou seja, $(c \cdot f)$ é uma função constante, que é mensurável. No caso em que $c > 0$, se f é mensurável, então dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\{x \in X \;:\; (c \cdot f)(x) > \alpha\} = \left\{x \in X \;:\; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \sigma(X).$$

No caso em que $c < 0$, se f é mensurável, então dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\{x \in X \ : \ (c \cdot f)(x) > \alpha\} = \left\{x \in X \ : \ f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\} \in \sigma(X).$$

$\blacksquare$

Proposição 2.6. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, então $f^2 : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Se f é mensurável, então dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} & \{x \in X \ : \ f^2(x) > \alpha\} \\ = \ & \{x \in X \ : \ f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X \ : \ f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \sigma(X). \end{aligned}$$

Dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, temos

$$\{x \in X \ : \ f^2(x) > \alpha\} = X \in \sigma(X).$$

$\blacksquare$

Proposição 2.7. *Se $f_1 : X \to \mathbb{R}$ e $f_2 : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então $(f_1 + f_2) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Se f_1 e f_2 são mensuráveis, então dados arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos que

$$S_r := \{x \in X \ : \ f_1(x) > r\} \cap \{x \in X : f_2(x) > \alpha - r\} \in \sigma(X).$$

Daí,

$$\{x \in X \ : \ (f_1 + f_2)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \sigma(X).$$

$\blacksquare$

Utilizando indução na Proposição 2.7 demonstra-se o seguinte resultado.

Corolário 2.8. *Se $f_1 : X \to \mathbb{R}$, ..., $f_n : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então $(f_1 + \ldots + f_n) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Proposição 2.9. *Se $f_1 : X \to \mathbb{R}$ e $f_2 : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então $(f_1 \cdot f_2) : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Suponhamos que f_1 e f_2 sejam mensuráveis. Notemos que

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{4}\left[(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2\right].$$

Segue então das Proposições 2.5, 2.6 e 2.7 que $(f_1 \cdot f_2)$ é mensurável. ■

Proposição 2.10. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, então $|f| : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, temos que

$$\{x \in X \ : \ |f(x)| > \alpha\} = X \in \sigma(X).$$

Dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, sendo f mensurável, temos que

$$\begin{aligned} & \{x \in X \ : \ |f(x)| > \alpha\} \\ = \ & \{x \in X \ : \ f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X \ : \ f(x) < -\alpha\} \in \sigma(X). \end{aligned}$$

■

Proposição 2.11. *Se $f_1 : X \to \mathbb{R}$ e $f_2 : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis, então as funções $h_1 : X \to \mathbb{R}$ e $h_2 : X \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$h_1(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \qquad e \qquad h_2(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\},$$

são mensuráveis.

Demonstração. Notemos que

$$h_1(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x) + |f_1(x) - f_2(x)|] \text{ e}$$

$$h_2(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x) - |f_1(x) - f_2(x)|].$$

Então, pelas Proposições 2.5, 2.7 e 2.10, concluímos que as funções h_1 e h_2 são mensuráveis. ■

Definição 2.4. A parte positiva da função $f : X \to \mathbb{R}$ é a função $f^+ : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

A parte negativa da função $f : X \to \mathbb{R}$ é a função $f^- : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Proposição 2.12. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se f^+ e f^- são, respectivamente, as partes positiva e negativa de f, então*

$$f = f^+ - f^- \qquad e \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Além disso, f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Demonstração. Vamos primeiramente mostrar que $f = f^+ - f^-$. De fato, se $x \in \{x \in X \ : \ f(x) \geq 0\}$, então

$$f(x) = f(x) - 0 = f^+(x) - f^-(x) = (f^+ - f^-)(x).$$

Se $x \in \{x \in X \ : \ f(x) < 0\}$, então

$$f(x) = 0 + f(x) = f^+(x) - f^-(x) = (f^+ - f^-)(x).$$

Vamos agora mostrar que $|f| = f^+ + f^-$. De fato, se $\{x \in X \ : \ f(x) \geq 0\}$, então

$$|f(x)| = f(x) + 0 = f^+(x) + f^-(x) = (f^+ + f^-)(x).$$

Se $x \in \{x \in X \ : \ f(x) < 0\}$, então

$$|f(x)| = 0 - f(x) = f^+(x) + f^-(x) = (f^+ + f^-)(x).$$

Se f é mensurável, sendo $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, segue das Proposições 2.2, 2.5 e 2.11 que f^+ e f^- são mensuráveis.

Se f^+ e f^- são mensuráveis, sendo $f = f^+ - f^-$, segue das Proposições 2.5 e 2.7 que f é mensurável.

■

Definição 2.5. Denota-se por $M(X, \sigma(X))$, a coleção de todas as funções mensuráveis definidas em X e assumindo valores reais estendidos, ou seja,

$$M = M(X, \sigma(X)) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \ : \ f \text{ é mensurável} \}.$$

Definição 2.6. Denota-se por $M^+(X, \sigma(X))$, a coleção de todas as funções mensuráveis e não negativas definidas em X e assumindo valores reais estendidos, ou seja,

$$M^+ = M^+(X, \sigma(X)) := \{f \in M \ : \ f \text{ é não negativa} \}.$$

Proposição 2.13. *Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável, então*

1. $\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\} \in \sigma(X)$;
2. $\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > -n\}\right]^C \in \sigma(X)$.

Demonstração. Seja $x \in A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$. Como $f(x) = +\infty$, temos que $f(x) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x \in B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\}$. Dado arbitrariamente $x \in B$, temos que $f(x) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $f(x) \geq \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ e daí $f(x) = +\infty$, ou seja, $x \in A$.

É imeditado constatar que $\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > n\} \in \sigma(X)$.

De forma análoga, prova-se a segunda igualdade. ■

Lema 2.14. *Uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, os conjuntos $A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ e $B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$ pertencem a $\sigma(X)$ e a função $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se\, x \notin A \cup B \\ 0, & se\, x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável.

Demonstração. Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável, $A, B \in \sigma(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere os conjuntos $C_1 = \{x \in X : \tilde{f}(x) > \alpha\}$ e $C_2 = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap A^C$. Vamos mostrar que $C_1 = C_2$. De fato, suponha $\alpha \geq 0$ e $x \in C_1$. Temos que $\tilde{f}(x) > \alpha \geq 0$ e $f(x) = \tilde{f}(x) \neq 0 > \alpha$. Então $x \notin A \cup B$ e assim $x \notin A$. Logo, $x \in C_2$. Reciprocamente, dado $x \in C_2$, temos que $x \notin A$ e $f(x) > \alpha \geq 0$. Logo, $\tilde{f}(x) = f(x) \neq 0$ e $x \notin A \cup B$. Portanto, $\tilde{f}(x) > \alpha$ e assim $x \in C_1$. Portanto, $C_1 = C_2$. Como f é mensurável e $A^C \in \sigma(X)$, segue que $C_2 \in \sigma(X)$. Logo, $\tilde{f}$ é mensurável.

Por outro lado, se $\alpha < 0$, considere os conjuntos $D_1 = \{x \in X : \tilde{f}(x) > \alpha\}$ e $D_2 = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup B$. De forma análoga, mostramos que $D_1 = D_2$. Note que como f é mensurável e $B \in \sigma(X)$, segue que $D_2 \in \sigma(X)$. Logo, $D_1 \in \sigma(X)$ e portanto $\tilde{f}$ é mensurável.

De mesma forma, prova-se a recíproca. ∎

É consequência dos resultados anteriores que se f é mensuravel, então as funções $cf, f^2, |f|, f^+$ e f^- são mensuráveis.

Quando $c = 0$, o produto $c \cdot f$ poderia ser indeterminado. Desta forma, adotamos a convenção $0(\pm\infty) = 0$, que contorna esta dificuldade.

Quando $f, g \in M(X, \sigma(X))$, a soma $f + g$, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, não está bem definida sobre os conjuntos

$$E_1 = \{x \in X : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}$$

$$E_2 = \{x \in X : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\}.$$

Note que E_1, $E_2 \in \sigma(X)$. Esta dificuldade é contornada convencionando $(f + g)(x) = 0$ para todo $x \in E_1 \cup E_2$, que resulta em uma função mensurável definida em X.

Lema 2.15. *Seja (f_n) uma sequência em $M(X, \sigma(X))$ e defina as funções*

$$f(x) = \inf f_n(x),\ F(x) = \sup f_n(x),$$

$$f^*(x) = \liminf f_n(x) \text{ e } F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Temos que as funções f, F, f^* e F^* são mensuráveis.

Demonstração. Mostremos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, os conjuntos $A = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ e $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\}$ são iguais. De fato, dado $x \in A$, temos que $\inf f_n(x) = f(x) \geq \alpha$. Note que $f_n(x) \geq \inf f_n(x) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $x \in B$. Reciprocamente, se $x \in B$, então $f_n(x) \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(x) = \inf f_n(x) \geq \alpha$, temos que $x \in A$.

Mostremos agora que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, os conjuntos $C = \{x \in X : F(x) > \alpha\}$ e $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}$ são iguais. De fato, dado $x \in C$, temos que $\sup f_n(x) = F(x) > \alpha$ e ainda, $\sup f_n(x) \geq f_n(x) > \alpha$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo $x \in D$. Reciprocamente, se $x \in D$, temos que $x \in \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $F(x) = \sup f_n(x) \geq f_n(x) > \alpha$, sabemos que $F(x) > \alpha$ e assim, $x \in C$.

Em viturde de termos f_n mensurável, segue que f e F também são. Utilizando argumentos análogos e notando que

$$f^*(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq m} f_n(x) \text{ e } F^*(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq m} f_n(x),$$

mostramos que as funções f^* e F^* são mensuráveis. ∎

Corolário 2.16. *Se (f_n) é uma sequência de funções em $M(X, \sigma(X))$ que converge para f, então $f \in M(X, \sigma(X))$.*

Demonstração. Note que $f(x) = \lim f_n(x) = \liminf f_n(x)$. Como f_n é mensurável, segue do Lema 2.15 que a função f é mensurável. ∎

Neste trabalho, assumiremos a validade do próximo resultado, que garante a mensurabilidade da composição de uma função mensurável com uma função contínua.

Proposição 2.17. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\varphi \circ f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Voltemos agora na mensurabilidade do produto $f \cdot g$ quando f e g mensuráveis. Dada $n \in \mathbb{N}$, definimos f_n como o truncamento de f, por

$$\max\{\min\{f(x), n\}, -n\} = f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n, & \text{se } f(x) > n, \\ -n, & \text{se } f(x) < -n. \end{cases}$$

Defina g_m de forma análoga. Pela Proposição 2.17, segue que f_n e g_m são mensuráveis. Assim, o produto $f_n \cdot g_m$ é mensurável. Visto que

$$f(x)g_m(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)g_m(x),$$

segue que fg_m é mensurável para cada $m \in \mathbb{N}$. Daí, como

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \lim_{m\to+\infty} f(x)g_m(x),$$

concluímos que $f \cdot g$ é mensurável.

O próximo e último resultado que apresentamos neste capítulo, apesar de ser extremamente importante para o decorrer do que apresentaremos em capítulos seguintes, será assumido como verdadeiro e sua demonstração será omitida.

Lema 2.18. *Se $f \in M^+(X, \sigma(X))$, então existe uma sequência (φ_n) em $M^+(X, \sigma(X))$ tal que*

1. $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *para cada* $x \in X$ *e cada* $n \in \mathbb{N}$;
2. $\varphi_n(x) \leq f(x)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e cada* $x \in X$;
3. $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ *para cada* $x \in X$;
4. $\varphi_n(X)$ *é finito, para cada* $n \in \mathbb{N}$.

3 MEDIDA

No Capítulo 2, introduzimos a noção de Espaço Mensurável $(X, \sigma(X))$, que consiste em um conjunto X e uma σ-álgebra $\sigma(X)$ de subconjuntos de X. Neste capítulo, iremos estudar funções definidas em $\sigma(X)$ que assumem valores reais estendidos. A definição dessas funções, é sugerida intuitivamente pela ideia de comprimento, área e volume.

Definição 3.1. Uma medida é uma função $\mu : \sigma(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(E) \geq 0$, $\forall E \in \sigma(X)$;
3. Se existe uma sequência (E_n) em $\sigma(X)$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n)$.

Como permitimos que μ assuma valores reais estendidos, pode ocorrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = +\infty$. Neste caso, ou $\mu(E_n) = +\infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ é uma série de termos não negativos que diverge.

Uma medida é chamada de finita quando não assume $+\infty$. Dizemos que uma medida é σ-finita se existe uma sequência (E_n) de conjuntos em $\sigma(X)$, com $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, tal que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.1. Sejam $X = \mathbb{R}$, $\sigma(X)$ a álgebra de Borel e μ a medida de Borel. Se o conjunto $E \in \sigma(X)$ é enumerável, então $\mu(E) = 0$. De fato, se E é enumerável, então podemos representar $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos considerar a família (E_n) em que $E_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$0 \leq \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$$

e consequentemente $\mu(E) = 0$.

Exemplo 3.1. Seja X um conjunto não vazio e $\sigma(X)$ a σ-álgebra contendo todos os subconjuntos de X. Sejam μ_1 e μ_2 definidas para todo $E \in \sigma(X)$ por

$$\mu_1(E) = 0$$

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E = \emptyset \\ +\infty, & \text{se } E \neq \emptyset\ . \end{cases}$$

É fácil ver que μ_1 e μ_2 são medidas. Note que μ_1 é finita e μ_2 não é finita.

Exemplo 3.2. Sejam $(X, \sigma(X))$ como definidos no Exemplo 3.1 e p um elemento fixo em X. Tome μ_3 definida para todo $E \in \sigma(X)$ por

$$\mu_3(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin E \\ 1, & \text{se } p \in E\ . \end{cases}$$

Temos que μ_3 é uma medida finita, chamada de medida unitária concentrada em p.

Exemplo 3.3. Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\sigma(X)$ a σ-álgebra que contém todos os subconjutos de X. Definamos $\mu : \sigma(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E\ , & \text{se } E \text{ é finito,} \\ +\infty\ , & \text{se } E \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Essa medida é chamada de Medida Contagem nos Naturais. Note que μ não é uma medida finita porém é σ-finita, pois $\mathbb{N} = \{\{1\} \cup \{2\} \cup ...\}$, ou seja, os naturais são escritos como união enumerável de conjuntos finitos.

Exemplo 3.4. Sejam $X = \mathbb{R}$ e $\sigma(X)$ a álgebra de Borel. Neste trabalho, vamos assumir a existência e unicidade de uma medida $\mu : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ tal que quando $E \in \sigma(X)$ é da forma $E = (a, b)$, tem-se

$\mu(E) = b - a$. Essa medida é frequentemente chamada de medida de Lebesgue ou medida de Borel.

Lema 3.1. *Seja μ uma medida definida em $\sigma(X)$. Se $E, F \in \sigma(X)$ e $E \subset F$ então*

1. *$\mu(E) \leq \mu(F)$;*
2. *Se $\mu(E) < +\infty$, então $\mu(F \backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Demonstração. **1.** Como $F = E \cup (F \backslash E)$ e $E \cap (F \backslash E) = \emptyset$, segue que $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \geq \mu(E)$.

2. Note que $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E)$ e $\mu(E) < +\infty$, então $\mu(F) - \mu(E) = \mu(F \backslash E)$. ■

Neste trabalho, assumiremos como verdadeira a validade do próximo resultado.

Lema 3.2. *Seja $\mu : \sigma(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida.*

1. *Se $(E_n) \subset \sigma(X)$ é uma sequência crescente, então*
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n)\,;$$
2. *Se $(F_n) \subset \sigma(X)$ é uma sequência decrescente e $\mu(F_1) < +\infty$, então*
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(F_n)\,.$$

Definição 3.2. Um espaço de medida é uma terna $(X, \sigma(X), \mu)$ que consiste em um conjunto X, uma σ-álgebra $\sigma(X)$ de X e uma medida μ definida em $\sigma(X)$.

Definição 3.3. Seja μ uma medida em $\sigma(X)$. Dizemos que duas funções f e g são iguais em quase toda parte, quando existe um conjunto $N \in \sigma(X)$, com $\mu(N) = 0$, tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \backslash N$. Neste caso, denotamos

$$f = g \; q.t.p.$$

Definição 3.4. Seja μ uma medida em $\sigma(X)$. Dizemos que uma sequência (f_n) de funções em X converge em quase toda parte para uma função f quando existe um conjunto $N \in \sigma(X)$, com $\mu(N) = 0$, tal que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X \backslash N$. Neste caso, denotamos

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n \, q.t.p.$$

Definição 3.5. Seja $\sigma(X)$ uma σ-álgebra do conjunto X. Dizemos que a função $\lambda : \sigma(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida com sinal quando

1. $\lambda(\emptyset) = 0$;
2. Se existe uma sequência (E_n) em $\sigma(X)$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n)$.

Proposição 3.3. *Seja $\mu : \sigma(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida. Se $A \in \sigma(X)$, então a função $\lambda : \sigma(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$ é uma medida.*

Demonstração. Como μ é medida, temos que $\mu(\emptyset) = 0$. Daí $\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Temos ainda que dado $E \in \sigma(X)$, tem-se $\lambda(E) = \mu(A \cap E) \geq 0$. Finalmente, note que

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)\,.$$

Portanto λ é uma medida. ∎

Proposição 3.4. *Sejam $\mu_1, ..., \mu_n$ medidas definidas em $\sigma(X)$ e $a_1, ..., a_n$ números reais não negativos, então a função λ definida para $E \in \sigma(X)$ por $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E)$ é uma medida.*

Demonstração. Como μ_j são medidas, note que

$$\lambda(\emptyset) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(\emptyset) = \sum_{j=1}^{n} a_j 0 = 0$$

e ainda, como $a_j \geq 0$ e $\mu_j(E) \geq 0$, temos que

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E) \geq 0\,.$$

Finalmente, note que

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{n}^{\infty} \mu_j(E_n) = \sum_{n}^{\infty} \lambda(E_n)\,.$$

Portanto λ é uma medida. ∎

4 INTEGRAL

Neste capítulo, definiremos Integral de Lebesgue de duas formas diferentes, porém estas não serão as únicas vezes que vamos definir Integral; nos próximos capítulos, estudaremos outras definições. Ainda no Capítulo 4, verificaremos algumas propriedades e resultados importantes acerca da Integral de Lebesgue.

Definição 4.1. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é simples quando seu conjunto imagem é finito. Uma função simples pode ser representada na forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \ ,$$

em que $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \sigma(X)$.

Entre as representações para a função simples φ, existe uma única representação com todos os a_j distintos e todos os E_j dois a dois disjuntos. Esta representação é chamada de representação padrão.

Note que se $\varphi(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $a_1, a_2, ..., a_n$ distintos, e se $E_j = \{x \in X : \varphi(x) = a_j\}$, então os conjuntos E_j são dois a dois disjuntos e $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Definição 4.2. Seja φ uma função simples em $M^+(X, \sigma(X))$ com a representação padrão

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} .$$

A integral de φ com relação à μ é um número real estendido definido por

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) \ .$$

A expressão anterior é empregada convencionando que $0 \cdot (+\infty) = 0$. Note que o valor da integral de uma função simples, mensurável e não negativa está bem definida (embora possa ser $+\infty$), visto que todos a_j são não negativos e por isso não encontramos expressões do tipo $(+\infty) - (+\infty)$.

Exemplo 4.1. (Função de Dirichlet) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Temos que f é integrável e $\displaystyle\int f d\mu = 1$. De fato, como $0 \cdot \chi_{([0,1]\cap\mathbb{Q})} + 1 \cdot \chi_{([0,1]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))}$ é a representação padrão para f, a integral de f com relação à μ é dada por

$$\int f\, d\mu = 0 \cdot \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 1 \cdot \mu([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})).$$

Pela Observação 3.1, temos que a medida de Lebesgue de um conjunto enumerável é nula e, como $\mu([0,1]) = \mu([0,1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) + \mu([0,1] \cap \mathbb{Q})$, temos que

$$\int f\, d\mu = 1 \cdot \mu([0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) = 1 \cdot \mu([0,1]) = 1 \cdot (1-0) = 1\,.$$

Lema 4.1. *Sejam φ, ψ funções simples em $M^+(X, \sigma(X))$ e $c \geq 0$.*

1. $\displaystyle\int c\,\varphi\, d\mu = c \int \varphi\, d\mu$;
2. $\displaystyle\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu$;
3. *Se $\lambda : \sigma(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ é definida por $\lambda(E) = \displaystyle\int \varphi \chi_E\, d\mu$, então λ é uma medida.*

Demonstração. **1.** Se $c = 0$ então $c\varphi = 0$ e assim

$$\int c\varphi\, d\mu = \int 0 d\mu = 0 = 0 \int \varphi\, d\mu\,.$$

Quando $c > 0$, então $c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c\, a_j \chi_{E_j}$ é a representação padrão de $c\varphi$. Daí,

$$\int c\varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c\, a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi\, d\mu\,.$$

2. Tome φ e ψ com as representações padrão $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ e $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$. Então $\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\chi_{E_j \cap F_k}$. Contudo, essa representação para $\varphi + \psi$ é uma combinação linear de funções características, não necessáriamente é a representação padrão para $\varphi + \psi$, pois $a_j + b_k$ podem não ser distintos.

Tome c_h, com $h = 1, 2, ..., p$ números distintos do conjunto $\{a_j + b_k : j = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ..., m\}$ e $G_h = \bigcup (E_j \cap F_k)$ tal que $a_j + b_k = c_h$. Assim, $\mu(G_h) = \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k)$. Como

$$\begin{aligned}\mu(E_j) = \mu(E_j \cap X) = \mu\left(E_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} F_k\right)\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)\,,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \mu(G_h) &= \sum_{h=1}^{p} c_h \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{h=1}^{p} \sum_{(h)} (a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi + \psi &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k)\,.\end{aligned}$$

Portanto, $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$.

3. Como $\varphi\chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}$, segue que

$$\lambda(E) = \int \varphi\chi_E d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{E_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E)\,.$$

Como μ é medida e $E_j \in \sigma(X)$, temos pela Proposição 3.3 que $\mu_j : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ definida por $\mu_j(E) = \mu(E_j \cap E)$ é medida. Podemos escrever λ como combinação linear das medidas μ_j. Daí segue da Proposição 3.4 que λ é medida. ■

Definição 4.3. Seja $f \in M^+(X, \sigma(X))$. A integral de f com relação a μ é um número real estendido dado por

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu\,,$$

em que o supremo é estendido a todas as funções simples $\varphi \in M^+(X, \sigma(X))$ satisfazendo $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Ou ainda,

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu \mid \varphi \in M^+ \text{ é simples e } \varphi(x) \leq f(x) \right\}.$$

Definição 4.4. Sejam $f \in M^+(X, \sigma(X))$ e $E \in \sigma(X)$. Temos que $f_{X_E} \in M^+(X, \sigma(X))$. Definimos a integral de f sobre E com relação a μ por

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu\,.$$

Lema 4.2. *Sejam $f, g \in M^+(X, \sigma(X))$. Se $f \leq g$, então*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu\,.$$

Demonstração. Como $\{\varphi \in M^+ : \varphi \text{ é simples e } \varphi(x) \leq f(x)\} \subset \{\varphi \in M^+ : \varphi \text{ é simples e } \varphi(x) \leq g(x)\}$, temos que

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu \mid \varphi \in M^+ \text{ é simples e } \varphi(x) \leq f(x)\right\}$$
$$\leq \sup\left\{\int \varphi d\mu \mid \varphi \in M^+ \text{ é simples e } \varphi(x) \leq g(x)\right\} = \int g d\mu\,.$$

■

Lema 4.3. *Sejam* $f \in M^+(X, \sigma(X))$ *e* $E, F \in \sigma(X)$*. Se* $E \subset F$*, então*

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu\,.$$

Demonstração. Como as funções $f\chi_E$ e $f\chi_F$ são mensuráveis e não negativas e $f\chi_E \leq f\chi_F$, segue que $\displaystyle\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu \leq \int f\chi_F d\mu = \int_F f d\mu$. ■

O próximo teorema é um dos principais resultados obtidos com a Integral de Lebesgue: exibe condições para comutar o limite com a integral. Para Integral de Riemann, o Teorema A.18 é um resultado equivalente, porém podemos enfrentar problemas quando a convergência não é uniforme, como verificamos nos Exemplos A.3 e A.4.

Teorema 4.4. ***(Teorema da Convergência Monótona)*** *Se* (f_n) *é sequência monótona crescente de funções pertencentes a* $M^+(X, \sigma(X))$ *com convergência pontual para* f*, então*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu\,.$$

Demonstração. Temos que se (f_n) é mensurável e converge para f, a função f é mensurável. Além disso, se $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, então $\displaystyle\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$. Como $\left(\displaystyle\int f_n d\mu\right)$ é monótona e limitada superiormente por $\displaystyle\int f d\mu$, segue que $\left(\displaystyle\int f_n d\mu\right)$ é convergente e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$.

A fim de estabelecer a desigualdade oposta, tome φ mensurável e simples e $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 < \alpha < 1$. Considere ainda o conjunto $A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$ tal que $A_n \in \sigma(X)$.

Note que $A_n \subset A_{n+1}$ e (A_n) é monótona crescente. De fato, se $x \in A_n$ então $x \in A_{n+1}$, pois $f_{n+1} \geq f_n \geq \alpha f$. Note também que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. De fato, suponhamos por absurdo que existe $x \in X$ tal que $x \notin A_n$, daí $f_n(x) < \alpha\varphi(x)$ e assim, $f_n(x) < \alpha f(x) < \varphi(x) \leq f(x)$. Então, $\lim f_n(x) < \alpha\varphi(x) < f(x)$.

Pelo Lema 4.2, segue que $\displaystyle\int_{A_n} \alpha f d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu$. Como $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$, obtemos pelo Lema 4.1 que

$$\int \varphi d\mu = \mu(X) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu\ .$$

Na inequação $\displaystyle\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int f_n d\mu$, aplicando o limite em ambos os lados, temos que $\displaystyle\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. Como $0 < \alpha < 1$ é arbitrário, segue que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Como consideramos arbitrariamente a função φ mensurável, não negativa, simples e tal que $0 \leq \varphi \leq f$, concluímos que

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

■

Corolário 4.5. *Seja $f \in M^+$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^+$ e*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu\ .$$

Demonstração. Quando $c = 0$ o resultado é imediato. Suponha $c > 0$ e tome (φ_n) uma sequência monótona crescente de funções simples em $M^+(X, \sigma(X))$ com convergência para f. Então $(c \cdot \varphi_n)$ é uma sequência monótona que converge para cf. Segue do Teorema 4.4 e do Lema 4.1 que

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to\infty} \int c \cdot \varphi_n d\mu = c \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu = c \int f d\mu \, .$$

■

Corolário 4.6. *Sejam $f_i \in M^+$ e $i = 1, ..., m$, então $\sum_{i=1}^{m} f_i \in M^+$ e*

$$\int \sum_{i=1}^{m} f_i d\mu = \sum_{i=1}^{m} \int f_i d\mu \, .$$

Demonstração. Vamos primeiramente provar o resultado para o caso em que $m = 2$. Sejam (φ_n^1) e (φ_n^2) sequências monótonas crescentes de funções simples que convergem respectivamente, para f_1 e f_2. Como $(\varphi_n^1 + \varphi_n^2)$ é uma sequência monótona crescente que converge para $f_1 + f_2$, segue do Lema 4.1 e do Teorema 4.4 que

$$\begin{aligned} \int (f_1 + f_2) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n^1 + \varphi_n^2) d\mu = \lim_{n\to\infty} (\int \varphi_n^1 d\mu + \int \varphi_n^2 d\mu) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^1 d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^2 d\mu \\ &= \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu \, . \end{aligned}$$

Agora, suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para um certo k, ou seja,

$$\int (f_1 + ... + f_k) d\mu = \int f_1 d\mu + ... + \int f_k d\mu \, . \tag{4.1}$$

Segue então, pelo que provamos para $m = 2$ e pela hipótese de indução, que

$$\begin{aligned}\int (f_1 + ... + f_k + f_{k+1}) d\mu &= \int [(f_1 + ... + f_k) + f_{k+1}] d\mu \\ &= \int (f_1 + ... + f_k) d\mu + \int f_{k+1} d\mu \\ &= \int f_1 d\mu + ... + \int f_k d\mu + \int f_{k+1} .\end{aligned}$$

■

O próximo resultado é uma consequência do Teorema da Convergência Monótona e permite que trabalhemos com sequências de funções que não são monótonas.

Lema 4.7. ***(Lema de Fatou)*** *Seja (f_n) uma sequência de funções pertencentes a $M^+(X, \sigma(X))$ com convergência pontual para f, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu .$$

Demonstração. Tome $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ de modo que $g_m \leq f_n$ quando $m \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned}\int g_m d\mu &\leq \inf_{n \geq m} \int f_n d\mu \\ &\leq \sup_n \inf_{n \geq m} \int f_n d\mu = \liminf \int f_n d\mu .\end{aligned}$$

Como $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ e $g_{m+1} = \inf\{f_{m+1}, f_{m+2}, ...\}$, temos que $g_m(x) \leq g_{m+1}(x)$, ou seja, (g_m) é crescente. Note que

$$\lim g_m(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} g_m(x) = \sup_m \inf_{m \leq n} f_n(x) = \liminf f_n(x) .$$

Assim, utilizando o Teorema 4.4, obtemos

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu .$$

■

Corolário 4.8. *Seja $f \in M^+(X, \sigma(X))$. Se $\lambda : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ é defini-*

da por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \,,$$

então λ é uma medida.

Demonstração. Provemos que λ é medida. Como $\chi_\emptyset(x) = 0$ para todo $x \in X$, temos que $\lambda(\emptyset) = \displaystyle\int_\emptyset f d\mu = \int f\chi_\emptyset \, d\mu = 0$. Se $E \in \sigma(X)$, então $\lambda(E) = \displaystyle\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu \geq 0$, pois $\chi_E(x) = 1$ para todo $x \in X$ e f é não negativa.

Seja (E_n) uma sequência de conjuntos em $\sigma(X)$, dois a dois disjuntos, tal que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$ e $f_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$. Note que, para todo $x \in X$,

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x)\chi_{E_k} = f\chi_{E_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k},$$

em que $f\chi_{E_{n+1}} \geq 0$. Logo, (f_n) é monótona crescente e, como é soma de mensuráveis, é mensurável. Note ainda que (f_n) converge para f_{χ_E}. Daí, segue pelo Teorema 4.4 que

$$\begin{aligned}
\lambda(E) &= \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{E_k} d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) \,.
\end{aligned}$$

∎

Corolário 4.9. *Seja $f \in M^+$. Temos que $f(x) = 0$ q.t.p. em X se, e somente se, $\displaystyle\int f d\mu = 0$.*

Demonstração. Suponha $f(x) = 0$ *q.t.p.* e tome $E = \{x \in X :$

$f(x) > 0\}$ e $f_n = n\chi_E$. Temos que $f \leq \liminf f_n$ e $\mu(E) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 < \int f d\mu &\leq \int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \\ &= \liminf \int n\chi_E d\mu = \liminf n\mu(E) = 0\,. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $\int f d\mu = 0$. Tome $E_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Então $f \geq \left(\frac{1}{n}\right)\chi_{E_n}$ e daí $\int f d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n)$. Note que $0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$ e portanto $\mu(E_n) = 0$. Como $0 \leq \mu(A) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = 0$, em que $A = \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, concluímos que A tem medida nula. Logo, $f(x) = 0$ $q.t.p.$

■

Corolário 4.10. *Suponha que $f \in M^+$ e defina $\lambda : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ por $\lambda(E) = \int_E f d\mu$. Então a medida λ é absolutamente contínua com relação a μ, ou seja, se $E \in \sigma(X)$ e $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = 0$.*

Demonstração. Se $\mu(E) = 0$, para algum $E \in \sigma(X)$, então $f\chi_E = 0$ $q.t.p.$ Daí,

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = 0.$$

■

Corolário 4.11. *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em M^+ com convergência q.t.p. para a função $f \in M^+$, então*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu\,.$$

Demonstração. Tome $N \in \sigma(X)$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f_n(x)$ converge para $f(x)$ para todo $x \in M = X\backslash N$. Então $(f_n\chi_n)$ converge para $f\chi_n$ para todo $x \in X$. Logo, pelo Teorema 4.4, segue que

$\int f\chi_N d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_M$. Como $\mu(N) = 0$, as funções $f\chi_N$ e $f_n\chi_N$ são nulas em quase todo ponto.

Note que quando N e M pertencem a $\sigma(X)$ e são tais que $N \cap M = \emptyset$ e $N \cup M = X$. Logo, $\chi_X(x) = \chi_N(x) + \chi_N(x)$ e segue do Corolário 4.9 que

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)\chi_X = f(x)(\chi_N(x) + \chi_M(x)) \, .$$

Como $f = f\chi_M + f\chi_N$ e $f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N$, temos

$$\int f d\mu = \int f\chi_M d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_M d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \, .$$

■

Corolário 4.12. *Se (g_n) é uma sequência em M^+, então*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right) \, .$$

Demonstração. Defina $f_m = \sum_{n=1}^{m} g_n = g_1 + ... + g_m$. Como $g_n \in M^+$, temos que $f_m \leq f_{m+1}$ e ainda, como f_m é soma de mensuráveis não negativas, temos que $f_m \in M^+$. Visto que $\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, temos

$$\begin{aligned} \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu &= \lim_{m\to\infty} \int f_m d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \sum_{n=1}^{m} g_n d\mu \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right) \, . \end{aligned}$$

■

5 FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

No Capítulo 4, definimos integral para funções simples, mensuráveis e não negativas e também para funções mensuráveis e não negativas. Neste Capítulo, definiremos integral para funções mensuráveis, descartando as hipóteses das funções serem simples e não negativas. Portanto, aumentaremos a gama de funções Lebesgue integráveis.

Veremos também um resultado semelhante ao Teorema da Convergência Monótona (Teorema 4.4). Ao invés de precisarmos de uma sequência com convergência pontual, exigida pelo Teorema 4.4, precisaremos apenas de uma sequência com convergência *q.t.p.*. Além disso, não será exigido que a sequência seja monótona.

No que segue, vamos denotar por $L = L(X, \sigma(X), \mu)$ o conjunto das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis tais que f^+ e f^- possuem integrais finitas, ou seja,

$$L = L(X, \sigma(X), \mu) := \left\{ f \in M : \int f^+ d\mu, \int f^- d\mu < +\infty \right\}.$$

Definição 5.1. Dizemos que $f \in M$ é integrável quando $f \in L$.

Definição 5.2. Dada $f \in L$, a integral de f com relação a μ é definida por

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \, .$$

Quando $E \in \sigma(X)$, definimos

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \, .$$

Apesar da integral da função f estar definida em função das integrais de f^+ e f^-, é fácil ver que se $f = f_1 - f_2$, em que f_1 e f_2 são mensuráveis, não negativas e possuem integrais finitas, então $\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu$. De fato, como $f^+ - f^- = f$ e $f = f_1 - f_2$, segue que $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$. Assim, pelo Corolário 4.5, temos

$$\int f^+ \, d\mu + \int f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f^- \, d\mu \,. \tag{5.1}$$

Note que cada termo da equação (5.1) é finito. Então

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu \,.$$

Lema 5.1. *Seja $f \in L$. Se $\lambda : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu \,,$$

então λ é uma medida com sinal.

Demonstração. Como f^+ e f^- são mensuráveis e não negativas, segue do Corolário 4.8 que as funções $\lambda^+ : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ e $\lambda^- : \sigma(X) \to \mathbb{R}$, definidas por $\lambda^+(E) = \displaystyle\int_E f^+ \, d\mu$ e $\lambda^-(E) = \displaystyle\int_E f^- \, d\mu$, são medidas. Note que λ^+ e λ^- são finitas, pois f é integrável. Como $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, segue que λ é uma medida com sinal. ■

A função λ definida acima é frequentemente chamada de integral indefinida de f com relação à μ. Como λ é medida com sinal, se (E_n) é uma sequência disjunta em $\sigma(X)$ com união igual a E, então

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu \,.$$

Na integral de Riemann, o valor absoluto de uma função integrável própria é integrável, porém o mesmo não ocorre com funções integráveis impróprias. Por exemplo, considere $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

O próximo resultado é por vezes referido como a propriedade de integrabilidade absoluta da integral de Lebesgue.

Teorema 5.2. *Seja f mensurável. Temos que f é integrável, se e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso, $\left| \displaystyle\int f \, d\mu \right| \leq \displaystyle\int |f| \, d\mu$.*

Demonstração. Por definição, f é integrável se, e somente se, é mensurável e as funções f^+ e f^- possuem integral finita. Como

$$\int |f|^+ d\mu = \int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty \text{ e}$$

$$\int |f|^- = 0 < +\infty\,,$$

segue que $|f|$ é integrável.

Reciprocamente, $|f|$ é integrável se, e somente se, é mensurável e as funções $|f|^+$ e $|f|^-$ possuem integral finita. Como $|f|^- = 0$, temos que $|f|^+ = f^+ + f^-$ e assim

$$+\infty > \int |f|^+ d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu\,.$$

Portanto, f é integrável. Então,

$$\begin{aligned} \left| \int f\, d\mu \right| &= \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu\,. \end{aligned}$$

∎

Observação 5.1. As sentenças abaixo são verdadeiras.

1. As integrais de f^+ e f^- são finitas se, e somente se, a integral de $|f|$ é finita;

2. Quando a integral de $|f|$ é finita, temos $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \geq \int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$;

3. Se f é mensurável e $\int |f| d\mu$ é finita, então $|f|$ é integrável. Note que $\int |f| d\mu = \int |f|^+ d\mu + \int |f|^- d\mu = \int |f|^+ d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$.

Corolário 5.3. *Sejam f mensurável e g integrável. Se $|f| \leq |g|$, então f é integrável e $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.*

Demonstração. Como f é mensurável, temos que $|f|$ é mensurável. Daí, sendo $|f|$ e $|g|$ mensuráveis, não negativas e $|f| \leq |g|$, temos que $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$. Sendo g integrável, concluímos que f é integrável. ■

Teorema 5.4. *Sejam f e g integráveis e $c \in \mathbb{R}$, então as funções $c \cdot f$ e $f + g$ são integráveis e suas integrais são dadas por*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu \text{ e } \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \,.$$

Demonstração. Temos que $c \cdot f$ é integrável se, e somente se, $|c \cdot f|$ é integrável, ou seja, quando $|c| \cdot |f|$ é integrável. Note que $|f|$ é mensurável e não negativa. Então para todo $c \in \mathbb{R}$, temos $|c| \geq 0$ e o produto $|c| \cdot |f|$ é mensurável e não negativo e assim, $\int |c \cdot f| d\mu = |c| \int |f| d\mu < +\infty$. Portanto $c \cdot f$ é integrável.

Temos que f e g são integráveis, então $|f|$ e $|g|$ também são. Como $|f+g| \leq |f| + |g|$, segue do Lema 4.2 e do Corolário 4.6 que $\int |f+g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < +\infty$. Portanto $|f+g|$ é integrável e assim, $f+g$ é integrável.

Vamos agora mostrar que $\int cf d\mu = c \int f d\mu$, para todo $c \in \mathbb{R}$. De fato, supondo $c = 0$, temos

$$\int cf\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0 = 0 \int f\, d\mu = c \int f\, d\mu \,.$$

Supondo $c < 0$, temos que

$$(cf)^+ = \sup\{cf(x), 0\} = -c \sup\{-f(x), 0\} = -cf^-$$

e análogamente, $(cf)^- = -cf^+$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int cf d\mu &= \int (cf)^+ d\mu - \int (cf)^- d\mu \\ &= \int -cf^- d\mu - \int -cf^+ d\mu \end{aligned}$$

$$\int cf d\mu = c\left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right)$$
$$= c\int f d\mu\,.$$

Supondo $c > 0$, a demonstração é análoga.

Finalmente, vamos mostrar que $\displaystyle\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g +$ $d\mu$. de fato, temos que $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, em que as funções $(f^+ + g^+)$ e $(f^- + g^-)$ são mensuráveis, não negativas e possuem integrais finitas. Daí,

$$\begin{aligned}\int (f+g)d\mu &= \int (f^+ + g^+)d\mu - \int (f^- + g^-)d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu\,.\end{aligned}$$

■

Observação 5.2. Com o Teorema 5.4, mostramos que o conjunto de funções integráveis é um espaço vetorial. Mostramos que o produto de um escalar por uma função integrável é integrável e também a soma de funções integráveis é integrável, ou seja, o conjunto de funções integráveis é fechado para soma e multiplicação por escalar.

Teorema 5.5. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis com convergência q.t.p. para f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| < g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu\,.$$

Demonstração. Se $f_n(x)$ converge *q.t.p.* para $f(x)$, então defina as funções $\tilde{f}_n : X \to \mathbb{R}$ e $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $N \in \sigma(X)$ com $\mu(N) = 0$, como

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{se } x \in X\backslash N \\ 0, & \text{se } x \in N \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X\backslash N \\ 0, & \text{se } x \in N \end{cases}$$

Note que $(\tilde{f}_n)$ é integrável, $\lim \tilde{f}_n(x) = f(x)$ e consequentemente, $\lim |\tilde{f}_n(x)| = |\tilde{f}(x)|$ para todo $x \in X$. Como $\left|\tilde{f}_n(x)\right| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, temos que $|\tilde{f}(x)| = \lim |\tilde{f}_n(x)| \leq g(x)$ então, $\displaystyle\int |\tilde{f}| d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty$. Logo,

$$\begin{aligned}\int g d\mu + \int \tilde{f} d\mu = \int (g + \tilde{f}) d\mu &= \int \lim_{n\to+\infty} \inf (g + \tilde{f}_n) d\mu \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \inf \left(\int g d\mu + \int \tilde{f}_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \lim_{n\to+\infty} \inf \int \tilde{f}_n d\mu \, .\end{aligned}$$

Então, obtemos $\displaystyle\int \tilde{f} d\mu \leq \liminf \int \tilde{f}_n d\mu$. De forma análoga, obtemos $\displaystyle\limsup \int \tilde{f}_n d\mu \leq \int \tilde{f} d\mu$. Assim, $\displaystyle\liminf \int \tilde{f}_n d\mu \leq \limsup \int \tilde{f}_n \leq \int \tilde{f} d\mu \leq \liminf \int \tilde{f}_n d\mu$, então

$$\lim \int \tilde{f}_n d\mu = \int \tilde{f} d\mu \, .$$

Temos que $\displaystyle\int \tilde{f}_n d\mu$ converge para $\displaystyle\int \tilde{f} d\mu$ e queremos mostrar que $\displaystyle\int f_n d\mu$ converge para $\displaystyle\int f d\mu$.

Como $\displaystyle\int f_n d\mu = \int_{X\backslash N} f_n d\mu + \int_N f_n d\mu$, obtemos

$$\int \tilde{f}_n d\mu = \int_{X\backslash N} f_n d\mu \ \text{ e } \int \tilde{f} d\mu = \int_{X\backslash N} f d\mu \, .$$

Então $\displaystyle\int_{X\backslash N} f_n d\mu$ converge para $\displaystyle\int_{X\backslash N} f d\mu$. Finalmente, pelo Corolário 4.9, $\displaystyle\int_N f_n d\mu = \int_N f d\mu = 0$ e assim

$$\int_{X\backslash N} f_n d\mu + \int_N f_n d\mu \to \int_{X\backslash N} f d\mu + \int_N f d\mu \, ,$$

ou seja, $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$. ■

Frequentemente é preciso considerar integrais onde o integrando depende de um parâmetro. Será mostrado como o Teorema 5.5 pode ser utilizado neste contexto.

No restante deste Capítulo, consideremos $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$, a função $f_t : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_t(x) = f(x, t)$ é mensurável.

Corolário 5.6. *Sejam $g : X \to \mathbb{R}$ integrável e $\lim\limits_{t\to t_0} f_{t_0}(x) = f_{t_0}(x)$ para todo $t_0 \in [a, b]$ e $x \in X$. Se $|f_t(x)| \leq |g(x)|$, então $\int f_{t_0}(x)d\mu(x)$ $= \lim\limits_{t\to t_0} \int f_t(x)d\mu(x)$.*

Demonstração. Seja (t_n) uma sequência em $[a, b]$. Como $f_{t_o}(x) = \lim\limits_{t\to t_0} f_{t_0}(x)$, então (t_n) converge para t_0 e assim, $(f_{t_n}(x))$ converge para $f_{t_0}(x)$ para todo $x \in X$. Então $|f_{t_n}(x)| \leq g(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$; logo, pelo Teorema 5.5, $\int f_{t_n} d\mu$ converge para $\int f_{t_0} d\mu$. Portanto,

$$\lim_{t\to t_0} \int f d\mu = \int f_{t_0} d\mu \Rightarrow \int f_{t_0} d\mu(x) = \lim_{t\to t_0} \int f_t d\mu(x)\,.$$

■

Corolário 5.7. *Sejam $g : X \to \mathbb{R}$ integrável e a função $t \to f(x, t)$ contínua em $[a, b]$ para todo $x \in X$. Se $|f_t(x)| \leq g(x)$, então $F(t) = \int f_t(x)d\mu(x)$ é contínua em $t \in [a, b]$.*

Demonstração. Note que possuímos todas as condições necessárias para utilizar o Corolário 5.6. Assim

$$\begin{aligned} \lim \int f_t d\mu = \int f_{t_0} d\mu &\Leftrightarrow \lim \int f(x, t)d\mu(x) \\ &= \int f(x, t_0)d\mu(x) \Leftrightarrow \lim F(t) = F(t_0)\,. \end{aligned}$$

■

Observação 5.3. O Corolário 5.7 é a generalização do Corolário 5.6, pois vale para todo $t_0 \in [a,b]$.

Corolário 5.8. *Seja $X \to f(x,t_0)$ integrável em X para todo $t_0 \in [a,b]$. Se existem $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ em $X \times [a,b]$ e $g : X \to \mathbb{R}$ integrável tal que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| < g(x)$, então $F(t) = \displaystyle\int f(x,t)d\mu(x)$ é diferenciável em $[a,b]$ e*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int f(x,t)d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)d\mu(x).$$

Demonstração. Sejam $t_0 \in [a,b]$, (t_n) uma sequência em $[a,b]$ que converge para t_0 com $t_n \neq t_0$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$$

para todo $x \in X$. Logo, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ é mensurável.

Se $x \in X$ e $t \in [a,b]$, existe $s_1 \in \mathbb{R}$. Então $t_0 \leq s_1 \leq t$ ou $t \leq s_1 \leq t_0$, tal que $f(x,t) = f(x,t_0) + (t - t_0) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,s_1)$. Dessa forma, obtemos

$$|f(x,t)| \leq |t - t_0| \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s_1)\right| + f(x,t_0) \leq |t-t_0| \cdot g(x) + |f(x,t_0)|.$$

Logo, $x \mapsto f(x,t)$ é integrável para todo $t \in [a,b]$. Portanto, se $t_n \neq t$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n - t}\left(\int f(x,t_n)d\mu(x) - \int f(x,t)d\mu(x)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x) \\
&= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x)\,.
\end{aligned}$$

■

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a Integral de Lebesgue há um aumento na gama de funções integráveis, comparando com a Integral de Riemann. Vimos, por exemplo, a função de Dirichlet, que não é Riemann integrável (Exemplo A.1), porém é Lebesgue integrável (Exemplo 4.1).

Outra vantagem na utilização da Integral de Lebesgue refere-se a comutatividade do limite com a integral. Na Integral de Riemann, não conseguimos garantir a comutatividade quando a convergência não é uniforme. Já na Integral de Lebesgue, estudamos três resultados que garantem comutar o limite com a integral, sem que se tenha necessariamente a convergência uniforme: o Teorema da Convergência Monótona (Teorema 4.4), que garante que podemos comutar o limite com a integral quando temos uma sequência monótona que converge pontualmente para uma função; o Lema de Fatou (Lema 4.7), que mostra um resultado semelhante ao Teorema 4.4 para sequências não necessariamente monótonas e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 5.5), que garante que podemos comutar o limite com a integral quando temos uma sequência (não necessariamente monótona) que converge *q.t.p.* para uma função.

As três definições para a Integral de Lebesgue foram gradativamente aumentando a gama de funções que poderiam ser ditas Lebesgue integráveis; a diferença entre elas está nas hipóteses sobre as funções que queremos integrar. No capítulo 4 definimos integral para dois tipos de funções. Na definição 4.2, definimos pela primeira vez integral, para funções simples, mensuráveis e não negativas. Na definição 4.3, estendemos a definição para funções mensuráveis e não-negativas. Já no Capítulo 5, aumentamos ainda mais a gama de funções: na Definição 5.2, definimos integral para qualquer função mensurável, considerando suas partes positiva e negativa.

Este trabalho permitiu o estudo de um conteúdo geralmente não abordado em cursos de graduação, que não estava na ementa de nenhuma disciplina da minha graduação. Além disso, o livro [1], principal referência do trabalho, é escrito em língua inglesa, possibilitando o desenvolvimento na leitura de outro idioma.

REFERÊNCIAS

[1] Robert Gardner Bartle. *The Elements of Integration.* 1ª ed. Nova York: John Wiley Sons, 1966, p. 123.

[2] Arthur Rezzieri Gambera. "História da integral de Lebesgue". Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2017.

[3] Elon Lages Lima. *Análise Real: Funções de uma Variável v. 1.* 12ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2017, p. 198.

[4] Elon Lages Lima. *Curso de Análise v. 1.* 14ª ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2017, p. 432.

Apêndices

APÊNDICE A – INTEGRAL DE RIEMANN

Os próximos objetos matemáticos apresentados serão relevantes principalmente para definir integrais superiores e inferiores e posteriormente Integral de Riemann.

A.1 SOMAS SUPERIORES E INFERIORES

Definição A.1. Uma partição de $[a, b]$ é um subconjunto de pontos $P = \{t_0, ..., t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a, b \in P$.

Por simplicidade fixamos $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. O i-ésimo intervalo da partição, $[t_{i-1}, t_i]$ tem comprimento $t_i - t_{i-1}$.

Observação A.1. Dizemos que uma partição P refina Q quando $Q \nsubseteq P$, sendo P e Q partições de $[a, b]$.

No que segue, sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, utilizaremos as seguintes notações

$$
\begin{aligned}
m &= \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}, \\
M &= \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}, \\
m_i &= \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \text{ e} \\
M_i &= \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.
\end{aligned}
$$

Definição A.2. A soma inferior de f relativa à partição P é dada por

$$s(f : P) = m_1(t_1 - t_0) + ... + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A soma superior de f relativa à partição P é dada por

$$S(f : P) = M_1(t_1 - t_0) + ... + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Note que $m(b-a) \leq s(f:P) \leq S(f:P) \leq M(b-a)$.

Observação A.2. Quando $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, $s(f:P)$ e $S(f:P)$ são respectivamente, aproximações por falta e por excesso da área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo das abscissas e pelas retas $y = a$ e $y = b$. Se $f(x) < 0$ para todo $x \in X$, temos a mesma aproximação, porém, com "sinal trocado".

Definição A.3. A oscilação de uma função no i-ésimo intervalo de uma partição P é dada por $\omega_i = M_i - m_i$.

Teorema A.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, a oscilação de f no i-ésimo intervalo é dada por* $\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

Demonstração. Sejam $A = \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, $B = \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Provemos que ω_i é cota superior para o conjunto B. Seja $x \in [t_{i-1}, t_i]$, temos que $M_i \geq f(x)$ e $m_i \leq f(y)$, assim, $M_i - m_i \geq f(x) - f(y)$. Então $f(x) - f(y) \leq M_i - m_i$ e $f(y) - f(x) \leq M_i - m_i$, ou seja, $M_i - m_i \geq |f(x) - f(y)|$. Logo ω_i é cota superior para B.

Suponha α cota superior para B, tal que $\alpha < \omega_i := M_i - m_i$, ou seja $\alpha + m_i < M_i$. Então, existe um $x \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $\alpha + m_i < f(x)$, logo, segue que $m_i < f(x) - \alpha$. De mesma forma, existe um $y \in [t_{i-1}, t_i]$, tal que $f(y) < f(x) - \alpha$, daí $\alpha < f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)|$, logo α não é cota superior, assim ω_i é a menor das cotas superiores. Portanto $\omega_i = \sup B$. ■

A.2 INTEGRAIS SUPERIORES E INFERIORES

Definição A.4. A integral inferior de f é dada por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{s(f:P) : P \text{ é partição de } [a,b]\right\}.$$

A integral superior de f é dada por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := c\inf\left\{S(f:P) : P \text{ é partição de } [a,b]\right\}.$$

Teorema A.2. *Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a superior não aumenta. Ou seja,* $P \subseteq Q \Rightarrow s(f : P) \leq s(f : Q)$ *e* $S(f : Q) \leq S(f : P)$*.*

Demonstração. Provemos para o caso em que Q refina P pelo acréscimo de um ponto. Sejam P e Q partições tais que $Q = P \cup \{t_x\}$, assim as somas inferiores relativas a P e Q são dadas por

$$s(f : P) = m_1(t_1 - t_0) + ... + m_r(t_r - t_{r-1}) + ... + m_n(t_n - t_{n-1}).$$

$$\begin{aligned} s(f : Q) =& m_1(t_1 - t_0) + ... + m_x(t_x - t_{r-1}) \\ &+ m_{r_x}(t_r - t_x) + ... + m_n(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Note que $m_r \leq m_x$ e $m_r \leq m_{rx}$. Queremos provar que $s(f : P) \leq s(f : Q)$. De fato, basta verificar que

$$s(f : Q) - s(f : P) = (m_x - m_r)(t_x - t_{r-1}) + (m_{rx} - m_r)(t_r - t_x) \geq 0.$$

Para obter o caso geral onde Q refina P pelo acréscimo de k pontos, basta utilizar este resultado k vezes. Analogamente é provado para somas superiores. ■

Corolário A.3. *Sejam* P, Q *partições de* $[a, b]$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então* $s(f : P) \leq S(f : Q)$*.*

Demonstração. Tome a partição $T = P \cup Q$, temos que $s(f : T) \leq S(f : T)$ e como T refina P e Q pelo Teorema A.2, segue que

$$s(f : P) \leq s(f : T) \leq S(f : T) \leq S(f : Q).$$

■

Corolário A.4. *Dada* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, se* $m \leq f(x) \leq M$ *para todo* $x \in [a, b]$*, então*

$$m(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b - a).$$

Demonstração. combinando as definições de integral inferior com soma inferior, obtemos $m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. De mesma forma, prova-se que $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

Como consequência do Corolário A.4, temos que $\sup\, s(f : P) \leq \inf\, S(f : Q)$ assim, $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Nete trabalho, assumiremos como verdadeiro o seguinte resultado.

Lema A.5. *Dados $A \subset B$ conjuntos limitados de números reais. Se para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $a \leq b$, então* $\inf\, A = \inf\, B$.

Corolário A.6. *Sejam P e P_0 partições de $[a,b]$. Se $P_0 \subseteq P$, então*

$$\inf\{S(f : P) : P\} = \inf\{S(f : P_0) : P_0\} \text{ e}$$

$$\sup\{s(f : P) : P\} = \sup\{s(f : P_0) : P_0\}\,.$$

Demonstração. Provemos que o resultado é válido para as somas superiores. Considere $A = \{S(f : P) : P \text{ é partição de } [a,b] \text{ com } P_0 \subseteq P\}$ e $B = \{S(f : P) : P \text{ é partição de } [a,b]\}$. Seja $b = S(f : P) \in B$, tome $T = P \cup P_0$, como T refina P_0, segue que $S(f : T) \in A$. Pelo Teorema A.2, temos que $b = S(f : P) \geq S(f : T) = a$, portanto pelo Lema A.5 $\inf\, A = \inf\, B$.

De forma análoga prova-se o resultado para as somas inferiores. ■

A.3 A INTEGRAL DE RIEMANN

Definição A.5. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é Riemann integrável quando suas integrais inferiores e superiores são iguais. Este valor chama-se integral de Riemann de f relativa ao intervalo $[a,b]$. Utilizamos a notação:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Geometricamente quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ é a área delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$.

Observação A.3. As integrais inferiores e superiores podem ser diferentes.

Exemplo A.1. Sejam $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, P uma partição qualquer de $[0, 1]$ e $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1] \backslash \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

Como P é uma partição de $[0, 1]$, possui números racionais e não racionais. Então, $m_1 = 0$ e $M_i = 1$, para $i = 1, ..., n$, daí $s(f : P) = 0$ e $S(f : P) = (1 - 0) = 1$ para toda partição P do intervalo $[0, 1]$. Logo $\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Portanto, $\int_0^1 f(x)dx$ não existe.

Proposição A.7. *Toda função constante é integrável.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$. Dada uma partição P qualquer, temos $m_i = c = M_i$, daí $s(f : P) = c(b - a) = S(f : P)$. Portanto, as integrais superiores e inferiores são iguais, logo existe a integral de Reimann. ■

Teorema A.8. ***(Condição imediata de integradilidade)*** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são satisfeitas:*

1. *f é integrável;*
2. *Para todo $\epsilon > 0$, existem partições P, Q tais que $S(f : Q) - s(f : P) < \epsilon$;*
3. *Para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f : P) - s(f : P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (t_i - t_{i-1}) < \epsilon$.*

Demonstração. Sejam A o conjunto das somas inferiores e B o conjunto das somas superiores de f. Já vimos que para todo $a \in A$ e $b \in B$, $a \leq b$. Supondo o item 1, obtemos $\sup\ A = \inf\ B$, mas $\sup\ A = \inf\ B \Leftrightarrow$ para todo $\epsilon > 0$ existam $a \in A$ e $b \in B$ com $b - a < \epsilon$, o que prova o item 2.

Suponha agora o item 2, então para todo $\epsilon > 0$. Existem partições P_1 e P_2 de $[a, b]$ tal que $S(f : P_1) - s(f : P_2) < \epsilon$. Seja $P = P_1 \cup P_2$, daí, $P \subseteq P_1$ e $P \subseteq P_2$. Note que $S(f : P) < S(f : P_1)$ e $s(f : P_2) < s(f : P)$, então $-s(f : P_2) > -s(f : P)$ e ainda, $S(f : P) - s(f : P) < S(f : P_1) - s(f : P_2) < \epsilon$.

Por fim, supondo o item 3 obtemos uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f : P) - s(f : P) < \epsilon$, para toda $S(f : P) \in A = \{S(f : P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}$ e $s(f : P) \in B = \{s(f : P) : P$ é partição de $[a, b]\}$. Dado $\epsilon > 0$, para todo $a \in A$ e $b \in B$ $a - b < \epsilon$ logo $\sup B = \inf A$. Ou seja, a integral inferior é igual a integral superior, portanto f é integrável. ∎

Exemplo A.2. Seja $f : [a, b] \to R$ definida por $f(x) = c$, tal que $c \in [a, b]$ e $f(a) = A$. f é integrável, com $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$.

Sem perda de generalidade, fixamos $c < A$. Seja P uma partição de $[a, b]$, temos que $m_1 = c, M_1 = A$ e $m_i = M_i = c$ para $i = 2, 3, ..., n$ e assim

$$\begin{aligned} S(f : P) - s(f : P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= A(t_1 - t_0) + \sum_{i=2}^{n} c(t_i - t_{i-1}) - c(t_1 - t_0) \\ &- \sum_{i=2}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = (A - c)(t_1 - t_0) \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos P com $t_1 - t_o < \dfrac{\epsilon}{A - c}$, muiltiplicando por $A - c$ em ambos os lados, obtemos $S(f : P) - s(f : P) < \epsilon$. Portanto, pelo Teorema A.8, f é integrável e ainda,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c(b - a) = \int_a^b f(x)dx\,.$$

A.4 PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Teorema A.9. *Seja $a < c < b$. A função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, as restrições $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ são integráveis, e* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Demonstração. Como f é integrável, suas integrais inferiores e superiores são iguais. Sejam A e B os conjuntos das somas inferiores de $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$, respectivamente. É evidente que

$$A + B = \{s(f : P) : P \text{ é partição de } [a,b] \text{ que contém c}\}.$$

Assim, temos que $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

De mesma forma, obtemos o resultado para as integrais superiores, e assim, obtemos

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right] + \left[\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = 0.$$

Note que temos uma soma de termos não negativos igual a zero, logo os termos são nulos, assim, as funções $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ são integráveis. De forma análoga prova-se a recíproca. ■

Definição A.6. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma escada, quando existem uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a,b]$ e números reais c_i tais que $f(x) = c_i$, quando $t_{i-1} < x < t_i$.

Proposição A.10. *Toda função escada é integrável e* $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$.

Demonstração. Temos que $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{s(f:P) : P$ é partição de $[a,b]\}$, e ainda como f é escada,

$$s(f:P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}) \tag{A.1}$$

Por outro lado, $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{S(f:P) : P$ é partição de $[a,b]\}$, com

$$S(f:P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}) \tag{A.2}$$

Analisando A.1 A.2, obtemos que f é integrável e $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$. ■

Teorema A.11. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis, então $f+g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,.$$

Demonstração. Sejam P partição de $[a,b]$, m_i', mi_i'' e m_i respectivamente os ínfimos de f, g, $f+g$, no i-ésimo intervalo de P. Como $\inf(f)+\inf(g) \le \inf(f+g)$, temos que, $m_i' + mi_i'' \le m_i$ e assim, $m_i'(t_i - t_{i-1}) + mi_i''(t_i - t_{i-1}) \le m_i(t_i - t_{i-1})$ daí $\sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} mi_i''(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$.

Tome P, Q partições de $[a,b]$, temos que $P \cup Q$ refina P e Q logo $s(f:P) + s(g:Q) \le s(f:P\cup Q) + s(g:P\cup Q) \le s(f+g:P)$, então

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

De mesma forma obtem-se as seguintes desigualdades para somas superiores

$$\overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Mas como f e g são integráveis, temos que

$$\underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) + g(x) dx\,.$$

$\blacksquare$

Teorema A.12. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis e $c \in \mathbb{R}$, então $f \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\int_a^b cf(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$.*

Demonstração. Mostremos que $f \cdot g$ é mensurável. Seja $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ e $|g(x)| \leq k$. Dado $\epsilon > 0$, existem partições P_1 e P_2 tais que $S(f : P_1) - s(f : P_1) < \dfrac{\epsilon}{2k}$ e $S(g : P_2) - s(g : P_2) < \dfrac{\epsilon}{2k}$.

Seja $P = P_1 \cup P_2$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i'(t_i - t_{i-1}) := S(f : P) - s(f : P) \leq S(f : P_1) - s(f : P_1) < \frac{\epsilon}{2k}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i''(t_i - t_{i-1}) := S(g : P) - s(g : P) \leq S(g : P_2) - s(g : P_2) < \frac{\epsilon}{2k}$$

Dada a partição P sejam

$$\omega_i' := M_i' - m_i'\,,\ \omega_i'' := M_i'' - m_i'' \text{ e } \omega_i := M_i - m_i$$

$$\text{em que } M_i' := \sup(f)\,,\ m_i' := \inf(f)\,,\ M_i'' := \sup(g)\,,$$

$$m_i'' := \inf(g)\,,\ M_i := \sup(f.g)\,,\ m_i := \inf(f.g)$$

no i-ésimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Para todo $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, tem-se

$$\begin{aligned}
|(f.g)(y) - (f.g)(x)| &\leq |f(y)g(y) - f(x)g(y)| \\
&\quad + |f(x)g(y) - f(x)g(x)| \\
&= |g(y)||f(y) - f(x)| + |f(x)||g(y) - g(x)| \\
&\leq k|[f(y) - f(x)]| + k|[g(y) - g(x)| \\
&\leq k\omega_i' + k\omega_i'' = k(\omega_i' + \omega_i'')
\end{aligned}$$

Então, $\omega_i \leq k(\omega_i' + \omega_i'')$, e assim,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-i}) \leq k\left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i'(t_i - t_{i-i}) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i''(t_i - t_{i-i})\right] < \epsilon\,.$$

Portanto $f.g$ é integrável.

Mostremos agora que $\int_a^b cf(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$. De fato, seja f integrável e $g(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, como g é uma função consatante é integrável. Suponha $c < 0$, temos que $s(cf : P) = cS(f : P)$, daí,

$$\begin{aligned}
\int_a^b cf(x)dx &= \underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sup\{s(cf : P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= \sup\{c\,S(f : P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= c\,\inf\{S(f : P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} \\
&= c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)dx\,.
\end{aligned}$$

Supondo $c \leq 0$ a demonstração é análoga. Portanto $c \cdot f$ é integrável e $\int_a^b cf(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$. ■

Teorema A.13. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Se $0 < k \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\frac{f}{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Como $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, basta provar que $\frac{1}{g}$ é integrável. Temos que g é integrável e $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. Sejam

ω_i e ω_i' as oscilações de g e $\dfrac{1}{g}$, respectivamente no i-ésimo intervalo de uma partição P. Note que se $k \leq |g(x)|$, então $\dfrac{1}{|g(x)|} \leq \dfrac{1}{k}$.

Como g é integrável para todo $\eta > 0$ existe uma partição P tal que $S(g : P) - s(g : P) < \eta$, considerando $\eta = \epsilon k^2$, temos que $S(g : P) - s(g : P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \eta = \epsilon k^2$. Por outro lado para quaisquer x, y no i-ésimo intervalo de P, tem-se $|\dfrac{1}{g(y)} - \dfrac{1}{g(x)}| = \dfrac{|g(x) - g(y)|}{|g(y)g(x)|} \leq \dfrac{\omega_i}{k^2}$. Então $\omega_i \leq \dfrac{\omega_i}{k^2}$, e ainda $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \epsilon$. Portanto $\dfrac{1}{g}$ é integrável. ∎

Teorema A.14. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*

Demonstração. Sejam $A_i = \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$e $B_i = \{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Quando $a \in A_i$, $b \in B_i$ e $a \leq b$ então $\sup A_i \leq \inf B_i$. Como $\inf A_i \leq \sup A_i$ segue que $\inf A_i \leq \inf B_i$.

Sejam $m_i = \inf A_i$ e $m_i' = \inf B_i$, $m_i \leq m_i'$ então $m_i(t_i - t_{i-1}) \leq m_i'(t_i - t_{i-1})$ e assim, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i - t_{i-1})$ ou seja $s(f : P) \leq s(g : P)$. Note que $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$ e como f e g são integráveis, temos que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. ∎

Teorema A.15. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integravel, então $|f|$ é integrável e $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.*

Demonstração. Sejam $\omega_i := \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$ e $\omega_i' := \sup\ \{||f(y)| - |f(x)|| : x, y \in [t_{i-1}, t_i]\}$ respectivamente, as oscilações de f e $|f|$ no i-ésimo intervalo de uma partição. Temos que $||f(y)|-|f(x)|| \leq |f(y)-f(x)| \leq \omega_i$, assim, $||f(y)|-|f(x)|| \leq \omega_i$ para todos $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Então $\omega_i' \leq \omega_i$.

Dados $\epsilon < 0$ e P uma partição de $[a, b]$, como f é integrável, temos que $S(f : P)-s(f : P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i-t_{i-1}) < \epsilon$. Note que como $S(|f| : P) - s(|f| : P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i'(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \epsilon$, segue que $|f|$ é integrável.

Dada a desigualdade $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, basta integrar em ambos os lados para obter $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. ■

Observação A.4. Pode acontecer da função $|f|$ ser integrável, porém a função f não ser integrável.

Corolário A.16. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $|f(x)| \leq k$, para todo $x \in [a, b]$ então $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k(b-a)$.*

Demonstração. Utilizando o Teorema A.11, temos que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b kdx \leq K\int_a^b dx = k(b-a).$$

■

Corolário A.17. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

Demonstração. Tome $g(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, resulta do Teorema A.14 que $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = \int_a^b 0dx = 0$. ■

Observação A.5. É possível ter $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, com

$\int_a^b f(x)dx = 0$ sem que f seja identidamente nula. Tome $f(x) = 1$ em uma quantidade finita de pontos e $f(x) = 0$ fora deste conjunto finito.

Observação A.6. Se f é contínua e $f(x) \geq 0$, a única forma de $\int_a^b f(x)dx = 0$ é f sendo identicamente nula.

Teorema A.18. *Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Com os próximos exemplos, observe que o teorema pode não ser válido quando a convergência não é uniforme.

Exemplo A.3. Sejam $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \{x_1, ..., x_n\} \\ 0, & \text{se } x \in [0,1]\backslash\{x_1, ..., x_n\} \end{cases}$$

e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ 0, & \text{se } x \in [0,1]\backslash\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

Temos que f_n é integrável para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1]$, mas f não é integrável.

Exemplo A.4. Sejam para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Temos que f_n é integrável para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$para todo $x \in [0,1]$, f é integrável e

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx$$

A.5 CONDIÇÕES DE INTEGRABILIDADE

Proposição A.19. *Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade uniforme de f em $[a,b]$, segue que existe $\delta > 0$, tal que para todos $x, y \in [a,b]$, se $|y - x| < \delta$, então $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$. Considere P uma partição de $[a,b]$ com $|t_{i-1} - t_i| < \delta$. Note que em todo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ existe x_i, y_i com $m_i = f(x_i)$ e $M_i = f(y_i)$, daí, $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)| = f(y_i) - f(x_i) < \dfrac{\epsilon}{b-a}$, então $\omega_i(t_i - t_{i-1}) < \dfrac{\epsilon(t_i - t_{i-1})}{b-a}$, e ainda, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\epsilon(t_i - t_{i-1})}{b-a} = \dfrac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = \epsilon$. Portanto f é integrável. ■

Proposição A.20. *Toda função monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, tomamos f uma função não-decrescente. Dado $\epsilon > 0$, seja P uma partição de $[a,b]$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ para todo $i = 1, ..., n$. Então $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \epsilon\omega_i \dfrac{1}{f(b) - f(a)} = \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \epsilon$. ■

APÊNDICE B – ESPAÇO L_1

Definição B.1. Seja V um espaço vetorial, então a função $N : V \to \mathbb{R}$ é uma norma para V, quando satisfaz

1. $N(v) \geq 0$ para todo $v \in V$;
2. $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
3. $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ para todo $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ para todo $u, v \in V$.

Se tirarmos o item 2, a função N é dita uma semi-norma ou uma pseudo norma para V. Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial V com uma norma definida sobre ele.

Exemplo B.1. A função Módulo é uma norma para os números reais.

1. Supondo $x \geq 0$, então $f(x) = x \geq 0$. Supondo $x < 0$, então $f(x) = -x > 0$.

2. Temos que $x \neq 0$ ou $x > 0$ ou $x < 0$. Se $x < 0$, temos que $f(x) = -x \neq 0$. Suponha $x > 0$, $f(x) = x \neq 0$. Logo, $f(x) \neq 0 \, \forall x \neq 0$. Pela definição da função f, $f(0) = 0$.

3. Tome $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ ou $\alpha = 0$. Suponha $\alpha = 0$, entao $f(\alpha x) = f(0) = 0 = 0 f(x)$. Suponha $\alpha < 0$, se $x < 0$, então $\alpha x > 0$ e asim, $f(\alpha x) = \alpha x = -\alpha(-x) = |\alpha| f(x)$. Suponha $\alpha > 0$, se $x < 0$, então $\alpha x > 0$, logo $f(\alpha x) = -(\alpha x) = \alpha(-x) = |\alpha| f(x)$. De forma análoga prova-se que para $x > 0$.

4. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $x + y > 0$, $x + y < 0$ ou $x + y = 0$. Supoha $x + y = 0$, $f(x + y) = f(0) = 0 \leq f(x) \leq f(x) + f(y)$. Suponha $x + y \geq 0$, então de $x \leq f(x)$ e $y \leq f(y)$, obtemos $x + y \leq f(x) + f(y)$, então $f(x + y) = x + y \leq f(x) + f(y)$. Suponha $x + y < 0$, então de $-x \leq f(x)$ e $-y \leq f(y)$. Assim, $-(x + y) \leq f(x) + f(y)$, daí $f(x + y) = -(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Teorema B.1. ***(Desigualdade de Holder)*** *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$, tais que $1 < p$, $q < +\infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Sejam x_i, y_i sequências de números reais, temos que*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Demonstração. Sejam $a_j = \dfrac{|x_i|^p}{\sum |x_i|^p}$, $b_j = \dfrac{|y_i|^q}{\sum |y_i|^q}$, $\alpha = \dfrac{1}{p}$ e $\beta = \dfrac{1}{q}$, daí $a^\alpha b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b$. Então,

$$\frac{|x_i|}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_i|}{(\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{\sum |x_i|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|^q}{\sum |y_i|^q}$$

$$\frac{\sum |x_i y_i|}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum |x_i|^p}{\sum |x_i|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum |y_i|^q}{\sum |y_i|^q}$$

$$\frac{1}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \cdot \sum |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\sum |x_i y_i| \leq \left(\sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

■

Teorema B.2. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Seja $p \in [1, +\infty]$, então para todos $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, temos que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Demonstração.

$$\sum |x_i + y_i|^p = \sum \left(|x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \right)$$

$$\leq \sum [(|x_i| + |y_i|) \cdot |x_i + y_i|]$$
$$= \sum \left(|x_i||x_i + y_i|^{p-1}\right) + \sum \left(|y_i||x_i + y_i|^{p-1}\right)$$
$$\leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q\cdot(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+ \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q\cdot(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left[\left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum |x_i + x_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

■

Exemplo B.2. As seguintes funções definem uma norma sobre $\mathbb{R}^n$.

$$N_p(u_1, ..., u_n) = (|u_1|^p + ... + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } p \geq 1$$

$$N_\infty(u_1, ..., u_n) = \sup\{|u_1|, ..., |u_n|\}$$

Provemos que N_∞ **é uma norma para** $\mathbb{R}^n$**.**

1. Note que $0 \leq |u_p| \leq \sup\{|u_1|, ..., |u_n|\}$ para todo $p = 1, ..., n$.

2. Como $\sup\{|u_1|, ..., |u_n|\} = 0$, então $0 \geq |u_p|$, para todo $p = 1, ..., n$. Por outro lado, $|u_p| \geq 0$, logo $|u_p| = 0$. Portanto, $(u_1, ..., u_n) = (0, ..., 0)$. Recíprocamente, tomando $N_\infty(0, ..., 0) = \sup\{0, ..., 0\} = 0$.

3. Note que $N_\infty(\alpha u_1, ..., \alpha u_n) = \sup\{|\alpha u_1|, ..., |_n|\} = \sup \{|\alpha| \cdot |u_1|, ..., |\alpha| \cdot |u_n|\} = |\alpha| \cdot \sup\{|u_1|, ..., |u_n|\} = |\alpha| \cdot N_\infty(u_1, ..., u_n)$.

4. Note que $N_\infty[(u_1, ..., u_n) + (v_1, ..., v_n)] = N_\infty(u_1 + v_1, ..., u_n + v_n) = \sup\{|u_1 + v_1|, ..., |u_n + v_n|\} \leq \sup\{|u_1|, ..., |v_n|\} + \sup \{|v_1|, ..., |v_n|\} = N_\infty(u_1, ..., u_n)$.

Provemos que N_p **é uma norma para** $\mathbb{R}^n$**.**

1. Note que $0 \leq |u_1|$ implica em $0 \leq |u_1|^p$ e assim

$$N_p(u_1, ..., u_n) = (|u_1|^p + ... + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } p \geq 1 \ .$$

2. Tome $N_p(0,...,0) = (|0|^p + ... + |0|)^p = (0,...,0)^{\frac{1}{p}} = 0^{\frac{1}{p}} = 0$. Reciprocamente, seja $(|u_1|^p + ... + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$ então $0 \leq |u_i| = (|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} < (\sum |u_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$.

3. Note que $N_p(\alpha u_1 + ... + \alpha u_n) = (|\alpha u_1|^p + ... + |\alpha u_n|^p) = (|\alpha|^p \cdot |u_1|^p + ... + |\alpha|^p \cdot |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|(|u_1|^p + ... + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|$ $N_p(u_1,...,u_n)$.

4. Direto da Desigualdade de Minkowski (Teorema B.2).

Exemplo B.3. O espaço vetorial l_1 de todas as sequências de números reais $u = u_1$, tal que, $N_1(u) = \sum |u_n| < +\infty$ é um espaço linear normado.

Exemplo B.4. A coleção de todas as sequências de números reais definidas em um conjunto X infinito, mas a coleção $B(X)$ de todas as funções limitadas definidas em X é normado por

$$N(f) = \sup\{|f(x)| : x \in X\}\,.$$

Em particular, o espaço vetorial das funções contínuas em $X = [a,b]$ é normado.

Os exemplos anteriores forman normas adequadas sobre espaços vetoriais. A seguir, veremos alguns exemplos de simi-normas definidas em espaços veotriais.

Exemplo B.5. No espaço $\mathbb{R}^n$, considere a semi-norma

$$N_0 = (u_1,...,u_n) = \sup\{|u_2|,...,|u_n|\}\,.$$

Aqui, $N_0(u_1,...,u_n) = 0 \Leftrightarrow u_2 = ... = u_n = 0$.

Exemplo B.6. No espaço vetorial $\mathscr{C}[0,1]$ de funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, defini-se a semi-norma

$$N_0(f) = \sup\left\{|f(x)| : o \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}\,.$$

Aqui, $N_0(f) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ tende a $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

Exemplo B.7. No espaço vetorial de funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com derivadas contínuas, considere a semi-norma

$$N_0(f) = \sup\{|f'(x)| : a \leq x \leq b\} .$$

Aqui, $N_0(f) = 0 \Leftrightarrow f$ é contínua em $[a, b]$.

Definição B.2. Seja $(X, \sigma(X), \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in L(X, \sigma(X), \mu)$ definimos $\int N_\mu(f) = \int |f| d\mu$.

Lema B.3. *O espaço $L(X, \sigma(X), \mu)$ é um espaço vetorial quando definimos para todo $x \in X$ as operações*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Temos que N_μ é uma semi-norma para $L(X, \sigma(X), \mu)$. Além disso $N_\mu(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ q.t.p. $x \in X$.

Demonstração. De forma análoga ao Teorema 5.4, mostramos que $L = L(X, \sigma(X), \mu)$ é um espaço vetorial com as operações definidas a cima.

Provemos agora que N_μ é uma semi-norma.

1. $N_\mu(f) \geq 0$ para $f \in L$.

2. Temos que $f \in M^+$, logo, pelo Corolário 4.9, que $f(x) = 0$ *q.t.p.* $\Leftrightarrow \int f(x) d\mu = 0$.

3. $N_\mu(\alpha f) = \int |\alpha f| d\mu \leq \int |\alpha| \int |f| d\mu = |\alpha| N_\mu(f)$.

4. Segue da Desigualdade Triângular que

$$\begin{aligned} N_\mu(f + g) &= \int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu \\ &= \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N_\mu(f) + N_\mu(g) . \end{aligned}$$

∎

Na tentativa de encontrar uma norma para o espaço vetorial $L(X, \sigma(X), \mu)$, identificaremos duas funções que são iguais em quase toda parte, isto é, usaremos classes de funções ao invés de funções.

Definição B.3. Sejam $f, g \in L = L(X, \sigma(X), \mu)$. Dizemos que f e g são equivalentes se elas são iguais em quase todo ponto.

Definição B.4. A classe de equivalência determinada por $f \in L$ é denotada por $[L]$ e consiste no conjunto de todas as funções pertencentes a L que se equivalem a f.

Definição B.5. O espaço de Lebesgue $L_1 = L_1(X, \sigma(X), \mu)$ consiste em toda classe de equivalência em L. Se $[f] \in L_1$, definimos a sua norma por $\|[f]\|_1 = \displaystyle\int |f| d\mu$.

Teorema B.4. *O espaço de Lebesgue $L_1(X, \sigma(X), \mu)$ é um espaço linear normado.*

Demonstração. Note que L_1 é espaço vetorial.

Provemos que $\|[f]\|_1$ é uma norma para L_1.

1. $\|[f]\|_1 = \displaystyle\int |f| d\mu$, como $|f| \geq 0$, então $\displaystyle\int |f| d\mu \geq \int 0 d\mu =$ 0.

2. $\|[f]\|_1 = 0$, então $\displaystyle\int |f| d\mu = 0$, como $|f(x)| \geq 0$, temos que $|f(x)| \in M^+$ e pelo Corolário 4.9, $\displaystyle\int |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ *q.t.p.*. Portanto $[f] = [0]$.

3., **4.** Análogo ao Lema B.3. ∎