UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: senx, cosx e tgx

Estudo de proposições de abordagem no ensino médio

FRANCIELY SAMISTRARO

Florianópolis, fevereiro 2004.

FRANCIELY SAMISTRARO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: senx, cosx e tgx

Estudo de proposições de abordagem no ensino médio

Trabalho de graduação apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura Matemática no curso de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

ORIENTADORA: Neri T. Both Carvalho

Florianópolis, fevereiro de 2004

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSAO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 16/scg/04

Prof ª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Dr. Neri Terezinha Both Carvalho
Orientadora

M.Sc. Rosimary Pereira

Dr. Licio Hernanes Bezerra

Agradecimento

Inicialmente, agradeço a Deus por tornar possível a realização deste trabalho.

A minha orientadora, Prof ª Neri. Obrigado pela seriedade na orientação, pela qualidade das discussões e pelo empenho quanto ao alcance dos objetivos traçados.

Ao meu namorado Cleber e a meu amigo Luciano.

Agradeço a todos que colaboram para a realização desse trabalho.

Índice

Introdução

Historicamente o grande avanço dos resultados matemáticos relativos às funções trigonométricas se deu em função dos problemas matemáticos surgidos, principalmente em estudos de astronomia, da navegação e da geografia. Foram assim situações reais vividas pelos homens que deram o impulso ao desenvolvimento teórico. Na atualidade, faz-se uso da trigonometria em diferentes áreas como: Análise, Mecânica, Topografia, etc.

Sabemos que noções de trigonometria são estudadas no ensino brasileiro nos níveis Fundamental e Médio.

Poderíamos questionar sobre a importância deste saber na formação do cidadão, o que contribui esse conhecimento para o bem viver no dia a dia. Mas esta não é a finalidade deste trabalho. Sabemos que a maioria dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental e Médio, antes de terem uma utilidade imediata no cotidiano das pessoas, têm um caráter cultural de conhecimentos básicos, julgados como relevantes para as pessoas.

Neste trabalho, de maneira geral, estamos interessados em conhecer o que é e como o conceito de função trigonométrica, em particular das funções seno, cosseno e tangente são propostos nos diferentes níveis. Para isto fizemos:

- Um estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), da Proposta Curricular de Santa Catrina (PCSC) , de Planejamentos Anuais e um estudo histórico, no capítulo II, onde obtemos informações sobre o que é proposto como saber oficial e nos permite ter uma idéia dos principais feitos que caracterizam a evolução do estudo das funções trigonométricas.

- No capítulo I abordamos elementos da teoria que nos orientam quanto aos diferentes lugares e de diferentes tratamentos dado a um determinado saber: saber Oficial, saber ensinar ou acadêmico, saber escolar etc.

- No capítulo III apresentamos o estudo de dois livros que representam o saber acadêmico, o qual nos permite conhecer como este saber é proposto no saber a ensinar.

- No capítulo IV, realizamos um estudo de livros didáticos, onde buscamos identificar o que é ensinado nas escolas, uma vez que os livros didáticos em geral, são usados como livro texto, em sala de aula, ou como referência para preparar aulas.

- Por fim, por meio de uma entrevista realizada com professores, buscamos identificar a abordagem segundo a declaração dos professores.

Capítulo I

Elementos Teóricos da Educação Matemática e questões de Pesquisa

Três são as grandes Teorias Didáticas da Matemática desenvolvidas na França. A Teoria das Situações (Brousseau), a Teoria dos Campos Conceituais (Gérard Vergnaud) e Teoria Antropológica do Saber (Yves, Chevalhard).

A Teoria das Situações é voltada ao estudo de todos os fenômenos que podem ocorrer em situações de classe, em sala de aula. Esta teoria tem como centro o aluno, o professor e o saber.

A Teoria dos Campos Conceituais, por sua vez, como o próprio nome diz considera que relativo a um determinado conceito matemático existe um conjunto de problemas e que podem ser resolvidos utilizando os resultados matemáticos orientados deste contexto.

A terceira e mais recente é a Teoria Antropológica do Saber (Yves, Chevalhard), a qual, em analogia com a biologia vê o objeto matemático como um ser, o qual tem um habitat e uma função, dependendo a quem se destina a obra. Ou seja, os conteúdos são organizados e abordados de maneira diferente em uma série ou outra. Em geral, a concepção do autor ou a finalidade do desenvolvimento do conteúdo interferem sobre a maneira no enfoque dado, no formalismo apresentado bem como nos exercícios ilustrativos ou propostos.

No contexto da Teoria Antropológica certas abordagens têm reflexo de características fortemente culturais. Por exemplo:

1) Itália e Brasil estudam Semelhanças de Triângulos, já na França Espanha, Alemanha e Inglaterra este tema não é objeto de estudo no Ensino Fundamental e Médio.
2) Na França o estudo de equação do 2º grau é feito somente por fatoração, já no Brasil a fórmula de Baskara é a principal técnica de resolução utilizada.

Ainda na Teoria Antropológica distinguimos:

- O Saber Oficial

É aquele determinado por meio de legislação oficial que deve ser ensinado nos diferentes níveis de ensino. No Brasil este saber é determinado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) em nível de País e depois em nível de Estado pela Proposta Curricular de Santa Catarina.

- O Saber a Ensinar

Conforme Chevalhard, determinados matemáticos, professores e pesquisadores manipulam o saber produzido cientificamente, formulam-no e reelaboram-no para o tornar mais acessível por um grupo maior de estudiosos. Deste trabalho resulta o saber acadêmico, ensinado nos cursos superiores, considerado um saber científico, candidato a ser ensinado nos níveis de Ensino Fundamental e Médio.

- O Saber Ensinado

É claro que, para este saber ser ensinado no Ensino Fundamental ou Médio, sofre outra adaptação na abordagem e na escolha e formulação dos exercícios, o que, em geral, enfraquecem-se as ligações entre conteúdos, enfraquecem-se as definições que perdem muitas vezes o rigor do formalismo. Chevalhard reconhece que muitas vezes, no nível Fundamental, chega-se a perder o objeto matemático em si e o que resta é a metodologia de abordagem, pois a preocupação em como abordar toma o lugar de abordar.

Temos assim que adaptações de conteúdos são feitas dependendo a quem o conteúdo se destina. Chevalhard chamou a todo o processo de transposição didática.

Neste trabalho, como já dito na introdução, estamos interessados em conhecer, referente às funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente):

- O que é proposto como saber oficial no Ensino Médio.

- O que propõe a academia como saber oficial.

- Como vive a função trigonométrica como saber ensinado nos livros didáticos.

- Que abordagem fazem os professores das funções seno, cosseno e tangente.

Capítulo II

A Trigonometria como Saber Oficial e Principais Feitos Históricos da sua Evolução

Um breve estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) nos permite identificar seno, cosseno e tangente como objetos de ensino no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico.

Estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), o estudo de Trigonometria deve se ater às funções seno, cosseno e tangente dando ênfase ao estudo da primeira volta do ciclo trigonométrico. Também, os PCNs propõem compreender a perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas .

Os PCNs propõem o estudo de Trigonometria no Triângulo Retângulo como objeto de estudo na 1ª série do Ensino Médio. Já na 2ª série do Ensino Médio, é proposto o estudo das Funções Trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Estudo da Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC)

Segundo a Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) "*a matemática ainda é vista somente como uma ciência exata – pronta e acabada, cujo ensino e aprendizagem se dá pela memorização ou por repetição mecânica de exercícios de fixação, privilegiando o uso de regras e"macetes"" (p 105).*

Na Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) a organização do conteúdo é feita através de "Campos Conceituais" pois considera que *"é necessário buscar elementos teóricos e conceituais nos diversos campos da ciência"* (p106). Temos aqui, de maneira intrínseca, uma proposição de abordagem dos conteúdos de maneira transdiciplinar.

Seguindo as orientações pedagógicas da Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) o conceito de "Trigonometria - Produção histórico-cultural e as Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo" é proposto como objeto de estudo a partir da 8ª série do Ensino Fundamental, 1ª e 2ª séries do Ensino Médio. Isto é, na 8ª série, o estudo no triângulo estuda seno, cosseno e tangente, não trabalha com o conceito de função de (0º,90º).

Porém, na rubrica “Campos Geométricos”, em “Sistemas de Medidas”, o conceito de ângulo é proposto como objeto de estudo a partir da quarta série do Ensino Fundamental.

Segundo a Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) (p 112), convém salientar que o estudo dos campos geométricos não se restringe às formas e ao Sistema de Medidas. Segundo a proposta, é importante explorar também a noção de ângulos, envolvendo movimento giratório, inclinações e diferença de orientações no espaço físico, representação no papel, a partir da qual ocorre um estudo mais sistemático com ângulo e com semelhança de triângulo.

Temos assim que a trigonometria tem lugar no ensino, segundo a Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC).

Em conclusão, na PCSC e PCN temos a proposição do estudo do triângulo retângulo como uma concepção diferenciada da estudada no ciclo trigonométrico. No triângulo retângulo o tratamento como razão trigonométrica é previsto, enquanto no ciclo trigonométrico é o conceito de função trigonométrica.

Considerando que a trigonometria é objeto de estudo no Ensino Médio na 1ª e 2ª séries sendo que somente na 2ª o conceito de função é considerado, estudaremos um Plano Anual de 2ª série do Ensino Médio para identificarmos como este conteúdo é proposto segundo um planejamento anual.

Estudo do Planejamento Anual

Estudamos dois planejamentos anuais de escolas públicas. Em um Planejamento Anual (anexo) de uma escola vemos que as funções seno, cosseno e tangente não aparecem como objeto de estudo na 2ª série do Ensino Médio, como proposto nos PCNs e PCSC, mas sim na 1 ª série do Ensino Médio.

Já no segundo Planejamento Anual as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são abordadas na 2ª série do Ensino Médio.

Considerando que os PCNs propõem a abordagem da trigonometria numa perspectiva histórica fizemos um breve relato dos principais feitos que marcaram a evolução da trigonometria.

Um pouco de história

Sobre essa rubrica apresentamos alguns dados históricos referentes à trigonometria.

A trigonometria surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes[1] para calcular o tempo e ser utilizada na Navegação e na Geografia, ficando conhecida, segundo Eves (1995) como uma criação da matemática grega.

Para melhor entender, construímos uma linha do tempo que contempla a evolução da trigonometria e depois apresentaremos alguns feitos relativos a cada época.

300 a.C	100 a.C	140 d.C	150 d.C	Século V	Século XII e XIII	Século XV	Século XVI E XVII	Século XVIII e XIX	Século XXI

Principais feitos:

300 a.C.: Segundo Carvalho, Aristarco de Samos, em seu livro *Sobre a Distância do Sol e da Lua*, deduziu que:

- Distância da Terra ao Sol é maior que 18 vezes e menor que 20 vezes a distância da Terra à Lua. Na demonstração deste fato aparece pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo.
- Os diâmetros do Sol e da Lua têm a mesma razão que suas distâncias da Terra.
- A razão do diâmetro do Sol pelo diâmetro da Terra é maior do que $\frac{19}{3}$ e menor do que $\frac{43}{6}$ (2001,p 101).

100 a.C.: Destacou-se Menelao de Alexandria que, em seu livro *Geometria Esférica*, demonstra vários teoremas sobre triângulos esféricos. Segundo Carvalho, Menelao usou, sem demonstrar, o teorema de Geometria plana conhecido hoje como *Teorema de Menelao*: Se o triângulo ABC é cortado por uma secante que intersecta seus três lados, como mostrado na Fig1, então: P3A. P2B. P1C = P3C. P2A. P1B.

[1] Publicação que fornece as coordenadas dos corpos celestes, em intervalos uniformes. Uma efeméride é igualmente uma informação, uma publicação apresentando uma correlação de tempo e posição dos corpos celestes.

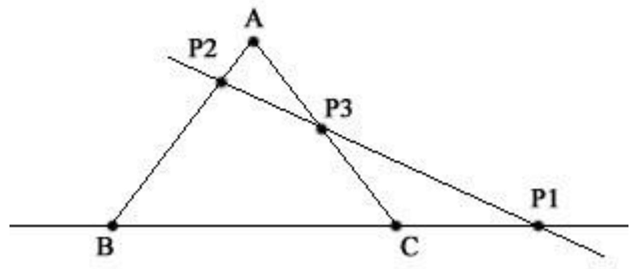


Fig1

140 d.C.: Foi Hiparco, ou talvez Hipsicles (180 a.C) quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360º. Sabe-se que ainda Hiparco de propugnava a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meios de latitudes e longitudes. Como quase nenhum dos escritos por Hiparco chegou até nós, tudo que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas" (p 202, Eves).

Foi Hiparco que fez a 1ª construção de uma tábua de cordas.

150 d.C.: Cláudio Ptolomeu construiu uma tábua de cordas, que fornece os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de 1/2º a 180º, com incremento de 1/2º (pode ter se baseado na de Hiparco). Divide-se o raio do círculo em 60 partes e se expressam os comprimentos das cordas sexagesimalmente em termos dessas partes. Seu Principal trabalho foi o *Almagesto*, onde traz uma tabela de cordas obtida a partir da fértil proposição geométrica conhecida como T*eorema de Ptolomeu: "Num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais* é *igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos"*

$$AB.CD + BC.AD = AC.BD$$

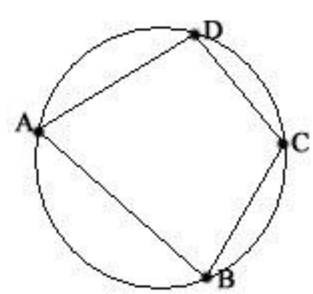


Fig 2

Ptolomeu deduziu, em notação moderna usando seno e cosseno, a expressão:

sen (a + b). Demonstrou também que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, onde α é um ângulo agudo.

Século V: O matemático hindu Aryabhata (476) abandonou a tabela de corda e adotou as tabelas de senos, passou a trabalhar com a corda *AB* do arco *AB,* em um círculo de raio 3438 (este número é obtido supondo que o comprimento da circunferência é 360.60 e usando o valor

3,14 para π). Com a mudança de raio, as tabelas de Ptolomeu não mais puderam ser utilizadas sendo, portanto, necessário refazê-las.

Séculos XII e XIII: Destaca-se Fibonacci (1180 – 1250) que propôs em seu livro *Prática da Geometria* (1200) a utilização da Trigonometria em Cartografia e em Topografia.

Século XV: Os árabes herdaram a Trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético destes ú1timos. Introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante.

Também neste século George Peurbach (1423-1461), traduziu o *Almagesto* e começou a calcular tabelas de senos mais precisas, exigidas pelas aplicações. Seu trabalho foi continuado por seu aluno, João Regiomontano (1436-1476),que organizou a Trigonometria como uma parte da matemática independente da Astronomia. Escreveu em 1464 *De Triangulus* onde estuda cuidadosamente a resolução de triângulos, usando a trigonometria do triângulo retângulo. Demonstra também as Leis dos Senos. Calculou duas tabelas de seno: uma com raio de 600.000 unidades e a outra com raio de 1.000.000 unidades, a fim de evitar o uso de frações e de decimais. Calculou também tabelas de tangentes.

Século XVI e XVII: François Vieta (1540-1603) sistematizou o estudo da trigonometria esférica, que até então era um amontoado de fórmulas desconexas, e mostrou que:

$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, deduziu fórmulas para sen(nθ) e cos(nθ).

Bartolomeu Pitisco (1561-1613) deu origem a palavra *Trigonometria*, que quer dizer: “medida dos ângulos de um triângulo”.

Foi Roberval (1602-1675) que introduziu em seus estudos sobre a ciclóide a curva seno. No livro *Mecânica de Wallis (1616, 1703), publicado em 1670*, temos um gráfico de dois períodos da função seno. É o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica. Usando método dos indivisíveis, Roberval mostrou que $\int_a^b senx dx$ = cos b - cos a.

Séculos XVIII e XIX: as Funções Trigonométricas foram essenciais para a solução de certos problemas de Matemática e de Física.

Século XXI: Hoje em dia, com a introdução da série de Fourier, a aplicação da trigonometria se estende à Análise, à Eletricidade, à Mecânica, à Topografia, etc.

Capítulo III

A Trigonometria Como Saber Ensinar

Para identificar elementos do saber "funções trigonométricas", mais precisamente sobre as funções seno, cosseno e tangente como saber disponível para ser ensinado no ensino médio, escolhemos para estudo os livros "Trigonometria Números Complexos" de Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado e Eduardo Wagner e o livro "Trigonometria", volume 3 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, de Gelson Iezzi.

A escolha destes livros deve-se principalmente ao fato de que na contra capa de ambos os livros encontramos uma intenção explicita de que o conteúdo desenvolvido visa a formação do professor de matemática do ensino médio (Trigonometria, Números Complexos) ou, diretamente, a alunos do ensino médio ou estudantes universitários para revisão de conteúdos básicos (Trigonometria), da coleção de Fundamentos de Matemática.

Ao produzirem os livros do nosso estudo, Iezzi, Carmo, Morgado e Wagner se colocam em posição noosferiana[2] e propõem abordagens e exercícios sobre funções trigonométricas, adaptando o saber visando a formação do professor e uma certa competência dos alunos do Ensino Médio. Nesta posição os autores manipulam os saberes adaptando a finalidade proposta por eles seguidos nas concepções de ensino de matemática.

Buscamos então neste estudo explicitar a proposição dos autores quanto à abordagem e quanto ao tipo de exercícios referentes às funções trigonométricas, seno, cosseno e tangente.

Mais precisamente veremos como os autores propõem a abordagem das noções de seno, cosseno e tangente no: Triângulo retângulo e Círculo trigonométrico.

Abordagem no Triângulo Retângulo

No estudo de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, Iezzi trata de "razão trigonométrica" cujas relações não dependem do triângulo em estudo, mas dependem do ângulo de referência. Segundo este ponto de vista Iezzi define:

"1º) Seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

2º) Cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

[2] Noosfera segundo Chevalhard é a camada da sociedade, isto é, pessoas ou instituições que são responsáveis pelas modificações dos saberes resultando em pesquisa, tornando-os a fim de que possam ser ensinados em qualquer outro nível.

3º)Tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo" (p.12).

Se fixado o ângulo, em um triângulo retângulo podemos determinar: seno do ângulo, cosseno do ângulo e tangente do ângulo.

Notemos que neste estudo a variação do ângulo não é considerada. O que temos é um valor de seno, cosseno e tangente relativo a um ângulo agudo considerado no triângulo retângulo.

Wagner, Morgado e Carmo, diferentemente que Iezzi ao estudar, seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, tratam já na primeira abordagem a concepção de função trigonométrica no ângulo agudo. Ou seja, consideram o ângulo θ variando no intervalo (0º, 90º) e que as relações obtidas entre lados do triângulo dependem apenas de θ e não dos comprimentos envolvidos. Seno cosseno e tangente são nomes dados a cada uma das funções, em que, se considerarmos o triângulo

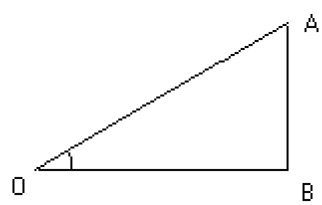


Fig 3

e o $\theta \in (0º, 90º)$ temos: $\text{sen}\theta = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$, $\cos\theta = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$, $\text{tg}\theta = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$.

Estas funções, dizem Wagner, Morgado e Carmo, são chamadas "funções trigonométricas".

Temos assim, segundo estes dois livros, duas abordagens que envolvem concepções distintas:

- senθ, cosθ, tgθ como uma razão trigonométrica isto é, quociente entre o comprimento de segmento segundo Iezzi.

- senθ, cosθ, tgθ como função onde θ varia de 0º a 90º, segundo Wagner, Morgado e Carmo.

Abordagem no Ciclo Trigonométrico

Diferentes saberes vivem no contexto de funções trigonométricas, dos quais depende a abordagem do conceito de função: a medida de arco, radiano, círculo orientado e medida de um ângulo em radiano.

Abordagem do livro: "Trigonometria Números Complexos" de Carmo, Morgado e Wagner

Uma abordagem por definições:

A medida de um ângulo em radianos

"A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo" (p. 24)

Assim se α = AÔB, na figura abaixo,

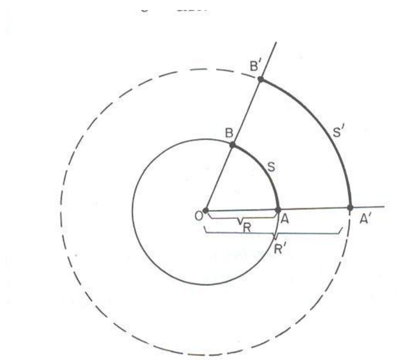


Fig 4

então $\alpha = \dfrac{S}{R}$. Portanto S = αR

Círculo orientado

Seja (S^1) uma circunferência unitária[3]. A circunferência pode ser percorrida em dois sentidos: horário e anti-horário. Tradicionalmente usa-se o sentido anti-horário.

[3] Circunferência de raio 1 e comprimento 2π

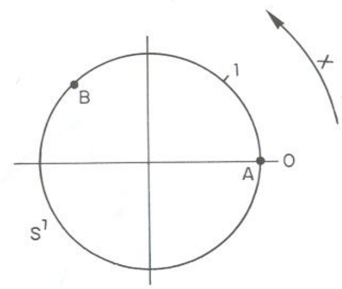


Fig 5

As funções trigonométricas

No capítulo 2 (do livro) é feita uma abordagem das funções trigonométricas para ângulos no intervalo de (0°,90°) ou em radianos (0, $\frac{\pi}{2}$) do seguinte modo:

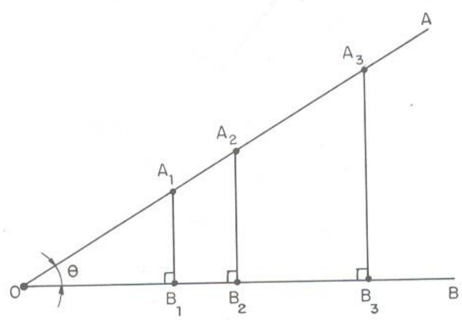


Fig 6

Seja AÔB = θ, 0º< θ< 90º. A partir dos pontos A_1, A_2, A_3 etc., na semi-reta AO traçam-se perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 etc., formando-se triangulos semelhantes por terem o mesmo ângulo. Portanto $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots\ldots$. Esta relação depende apenas do ângulo θ. Logo

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = sen\theta$$

As relações $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \ldots\ldots$ e $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \ldots\ldots$

também dependem apenas do ângulo θ . Assim temos cosθ $= \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$ e tgθ = $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}$

No capítulo 3 desse livro as funções seno, cosseno e tangente foram estendidas para todos os números reais, mantendo-se as relações básicas:

$sen^2x + cos^2x = 1$ e $tg\ x = \dfrac{senx}{\cos x}$

Como?

Considerando-se a função $E: R \rightarrow S^1$ em que S^1 é a circunferência unitária, fixando-se uma origem A em S^1 e dado um número real x, percorre-se sobre S^1 a partir do ponto A um comprimento x, no sentido anti-horário se x > 0 e horário se x < 0. E(x) será um ponto de S^1.

Note que se $x > 2\pi$ será necessário dar mais de uma volta em S^1 no sentido anti-horário para atingir E(x), o mesmo ocorre se $x < -2\pi$

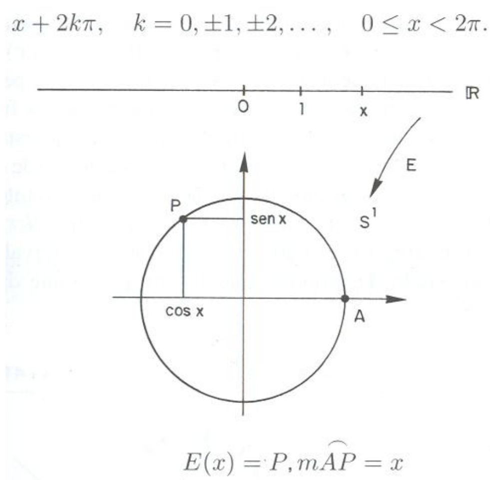


Fig 7

Dado um ponto P de S^1, ele é imagem pela função E de uma infinidade de números reais, todos eles da forma : $x + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1 \pm 2 \pm .....0 \le x \le 2\pi$

Exprime-se este fato dizendo que $x+2k\pi$ são as "várias determinações" do ângulo AP (querendo dizer com isto que $x+2k\pi$ são os vários pontos da imagem inversa de P), ou que x e $x+2k\pi$ são côngruos (querendo dizer com isto que a diferença entre eles é um múltiplo de 2π).

No Sistema de coordenadas cuja origem é o centro de S^1 e A = (1,0) define-se:

cos x = abscissa de P

senx = ordenada de P

$$tg\ x = \frac{senx}{\cos x}, \text{ se } \cos x \neq 0$$

Estas definições coincidem com a anterior quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Além disso, permitem escrever que:

$$\cos 0^{\circ} = 1 \text{ e } \operatorname{sen} 0^{\circ} = 0 \text{ (quando P = A)}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ e } \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \text{ (quando AÔP é reto)}$$

Ainda, como todo ponto P = (cosx, senx) de S^1 está a uma distância 1 da origem, temos como conseqüência $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

O valor das funções cosseno e seno serão positivos ou negativos, dependendo do quadrante em que se encontram. Vamos mostrar como é possível determinar o valor da função seno e cosseno, por exemplo, em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no primeiro quadrante.

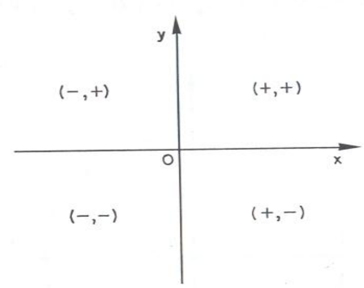
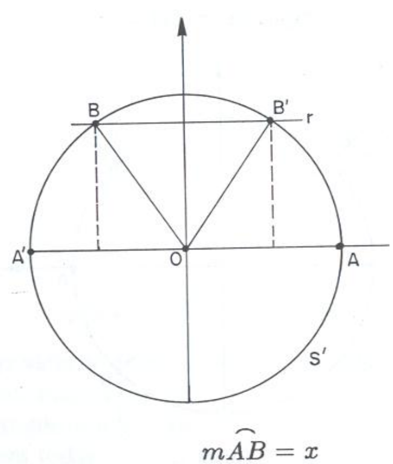
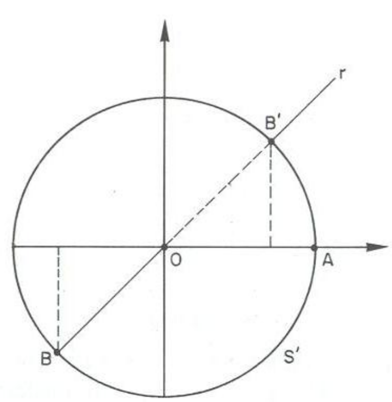


Fig 8

Consideremos separadamente os casos em que a extremidade B do arco AB está no segundo, terceiro ou quarto quadrantes.

a) x está no segundo quadrante b) x está no terceiro quadrante c) x está no quarto quadrante





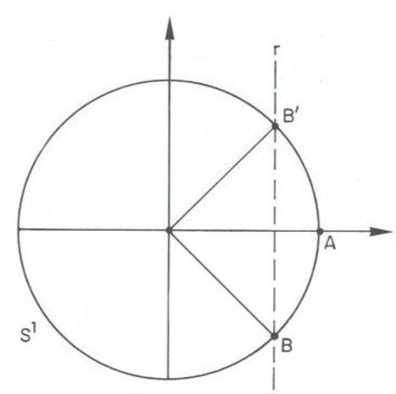


Fig 9 Fig 10 Fig 11

a) x está no segundo quadrante, isto é, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Tracemos por B uma reta r paralela ao eixo da abscissa que intercepta S^1 em B e B' (conforme a Fig 9). Se m é a medida algébrica do arco AB, temos que mAB'= mBA', mas m.AB'= π -x, pois m AA'= π e m AB= x, logo temos que:

$$\text{sen}x = \text{sen}(\pi\text{-}x) \text{ e}$$

$$\cos x = - \cos(\pi\text{-}x)$$

b) x está no terceiro quadrante, isto é, $\pi< x < \frac{3\pi}{2}$

Seja r a reta que liga O a B. Comparando senx e sen(x - π), também cosx e cos(x-π) (na Fig10), temos que:

$$\text{sen}x = -\text{sen}(x - \pi)$$

$$\cos x = \cos(x - \pi)$$

c) x está no quarto quadrante, isto é, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Tracemos uma reta r, paralela ao eixo das ordenadas (Fig 11). Temos mAB' = 2π – x considerando-se que a medida AB é x e a medida do arco de uma volta é 2π, temos que:

$$\text{sen}x = -\text{sen}(2\pi\text{-}x)$$

$$\cos x = \cos(2\pi\text{-}x)$$

Esse processo é chamado "*redução do seno ao primeiro quadrante*" ou "*redução do cosseno ao primeiro quadrante*".

A conclusão que acabamos de fazer é que os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores destas funções no primeiro quadrante.

Para se ter uma idéia do comportamento global de uma função trigonométrica é conveniente traçar o seu gráfico. Por exemplo, *o gráfico da função seno* reúne em uma figura todas as informações que obtivemos sobre a função seno. A princípio, seria necessário conhecer todos os pontos (x, senx) para poder traçar o gráfico.

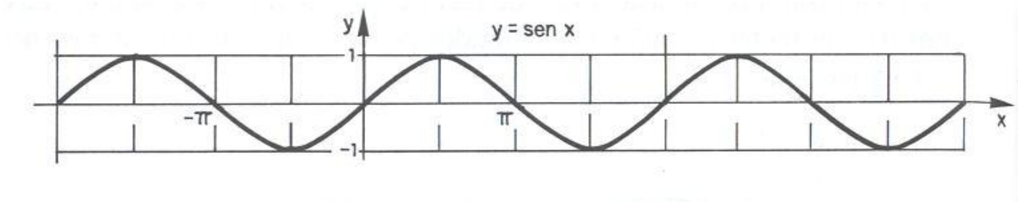


Fig 12

Da mesma maneira, obtemos o gráfico da função cosseno, isto é, o conjunto dos pontos do plano de coordenadas (x, cosx).

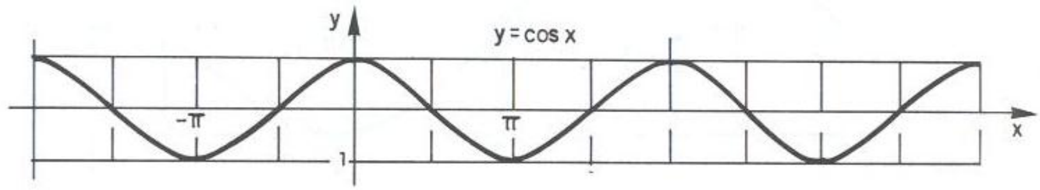


Fig 13

Vimos anteriormente que tg x = $\frac{senx}{\cos x}$, se cosx $\neq$ 0. Observe que tgx não é definida para x = $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ. Consideremos o círculo trigonométrico e uma reta orientada tangente a S^1 em A (conforme a Fig14). Seja AB um arco de medida x. A reta que contém O e B determina B' em S^1 e T na reta tangente. Mostremos que tg x é a medida algébrica do segmento AT.

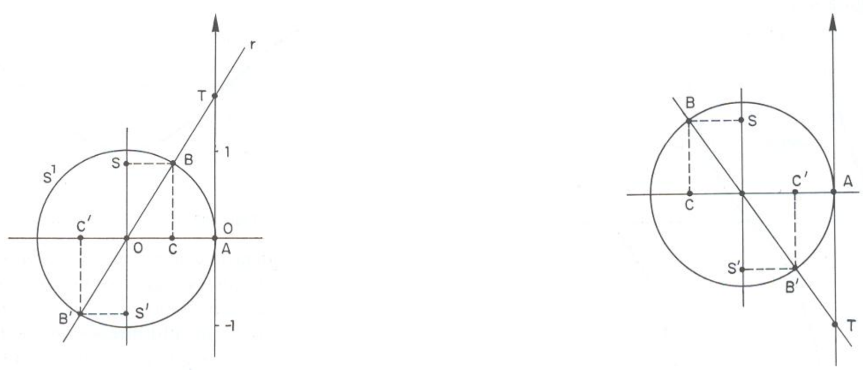


Fig 14

Se B está no 1º e 3º quadrante, os triângulos OCB, OSB, OC'B' e OS'B", da figura acima, são congruentes e semelhantes ao triângulo OAT. Portanto

$$\text{tgx} = \frac{senx}{\cos x} = \frac{OS}{OC} = \frac{CB}{OC} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = \text{mAT}$$

$$\text{tg}(x + \pi) = \frac{sen(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-OS'}{-OC'} = \frac{C'B'}{OC'} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = \text{mAT}$$

Se B está no 2º ou 4º quadrante, as relações de semelhanças entre os triângulos são análogas ao que fizemos acima, tgx = tg (x + π) = -AT = mAT.

Note que a função tangente é periódica de período π .

Pode–se então esboçar o gráfico da função tangente no intervalo [0, π] e repeti-lo em todos os intervalos da forma [kπ , (k + 1) π].

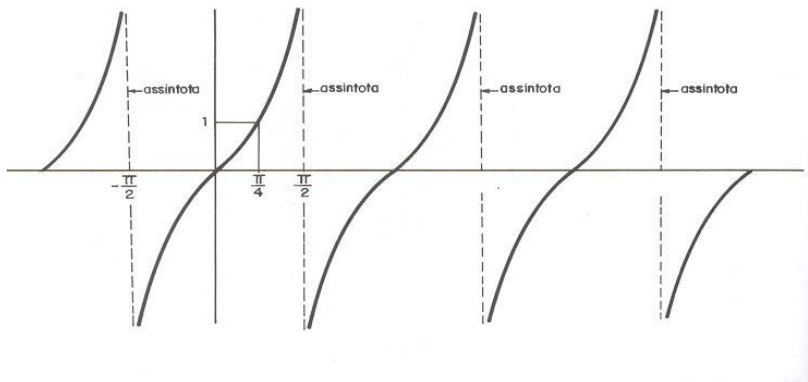


Fig 15

Wagner, Morgado e Carmo introduzem as funções trigonométricas auxiliares como secante[4], cossecante[5] e cotangente[6].

Abordagem do livro: "Trigonometria" da coleção Fundamentos de Matemática Elementar de Iezzi

Função seno

"Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos senx) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função f:R→R que associa a cada real x o real OP_1 = senx, isto é: f(x) = senx" (p. 93)

---

4 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, se cos x ≠ 0

5 $\cos\sec x = \dfrac{1}{senx}$, se senx ≠ 0

6 $\cot gx = \dfrac{\cos x}{senx}$ se senx ≠ 0

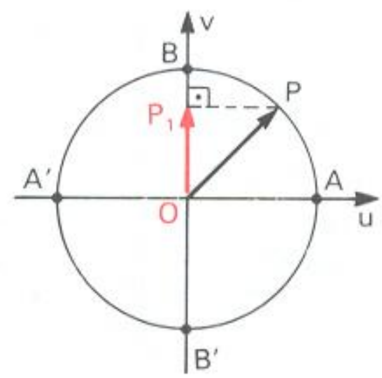


Fig 16

- Propriedades

  a) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, o ponto P está acima do eixo u e sua ordenada é positiva, então senx é positivo;

  b) Se x é do terceiro ou quarto quadrante, o ponto P está abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa, então senx é negativo;

  c) Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então senx é crescente;

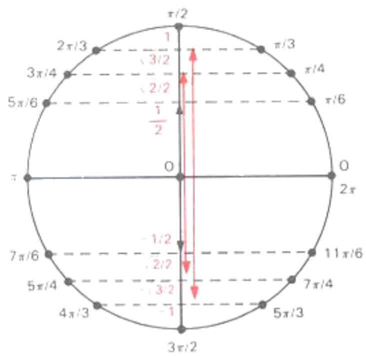
  d) Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então senx é decrescente;

  e) A imagem da função seno é o intervalo [-1, +1], isto é $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$ para todo x real.A justificativa é imediata, pois se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a +1

  f) A função seno é periódica e seu período é 2π. É imediato que, se senx = OP_1 e K$\in$Z, então sen(x + k2π) = OP_1, pois x + k2π têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real senx = sen(x + k2π) e, portanto, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de k2π, isto é, 2π.

- Gráfico

  "*Fazendo um diagrama com x em abscissas e senx em ordenadas podemos construir o seguinte gráfico, denominado senóide, que nos indica como varia a função f(x) = senx*" (p94).



x	y = sen x
0	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0

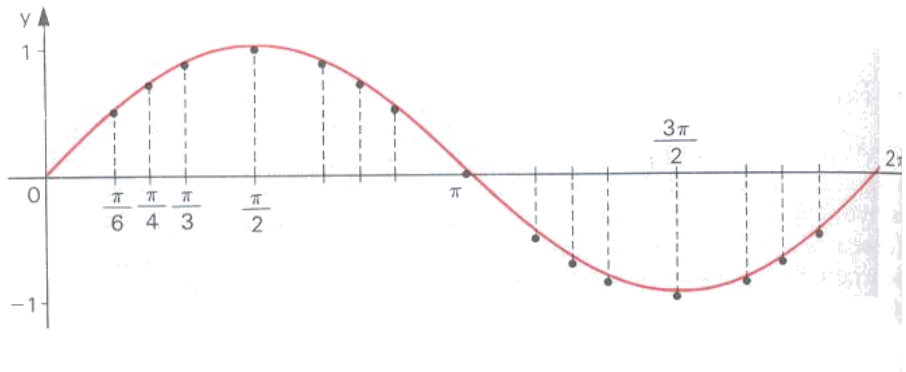


Fig 17

Como o domínio da função seno é R, a senóide continua à direita de 2π e à esquerda de zero.

Função Cosseno

"*Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos cosx) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função cosseno a função f:R→R que associa a cada número real x o número real cosx, isto é: f(x) = cosx*"

(p 103)

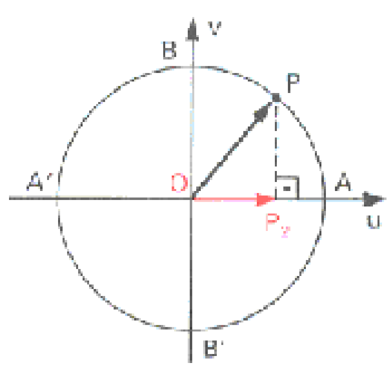


Fig 17

- Propriedades:

    a) Se x está no primeiro e quarto quadrante, o ponto P está à direita do eixo v e sua abscissa é sempre positiva, então cosx é positivo.

    b) Se x está no segundo e terceiro quadrante, o ponto P está à esquerda do eixo v e sua abscissa é sempre negativa, então cosx é negativo.

    c) Se x percorre o terceiro e o quarto quadrante, então cosx é crescente.

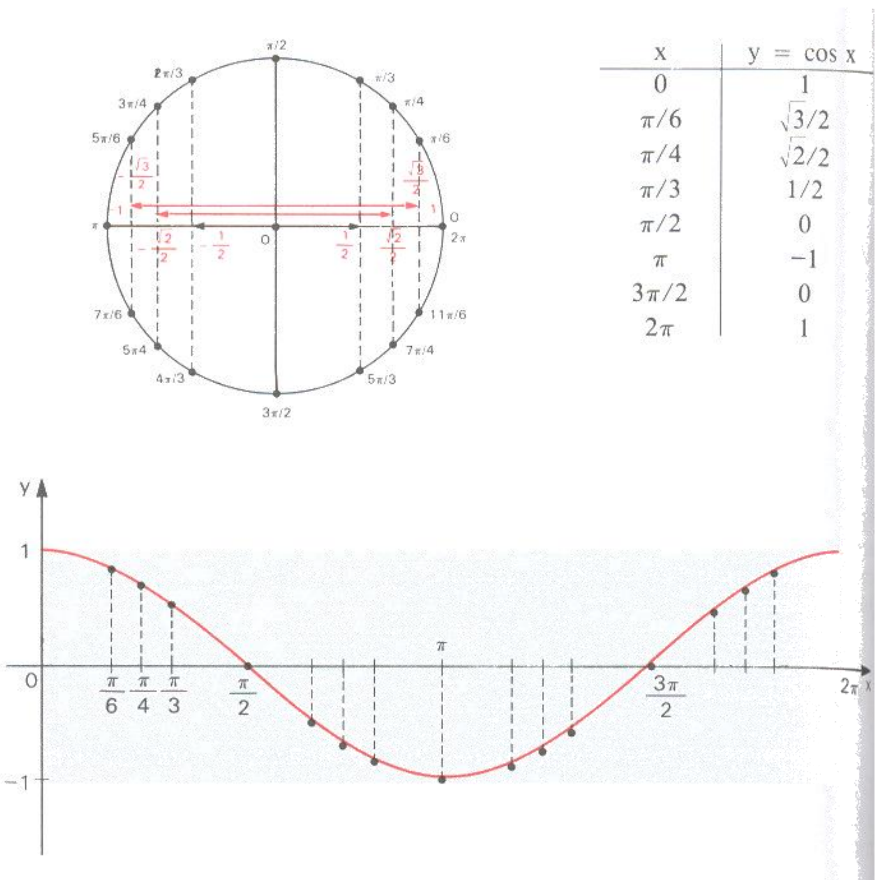
    d) Se x percorre o primeiro e segundo quadrante, então cosx é decrescente.

    e) A imagem da função cosx é o intervalo [-1, +1], isto é $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.

    f) A função cosx é periódica e seu período é 2π.

- Gráfico

"*Fazendo um diagrama com x em abscissa e cosx em ordenadas podemos construir o seguinte gráfico, denominado cossenóide, que nos indica como varia a função f(x) = cosx*" (p104).



x	y = cos x
0	1
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$
$\pi/2$	0
π	-1
$3\pi/2$	0
2π	1

Fig 19

Como o domínio da função cosseno é R, a cossenóide continua para a direita de 2π e a esquerda de zero.

Função Tangente

Dado um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos tangente de x (e indicamos tgx) a medida do segmento AT.

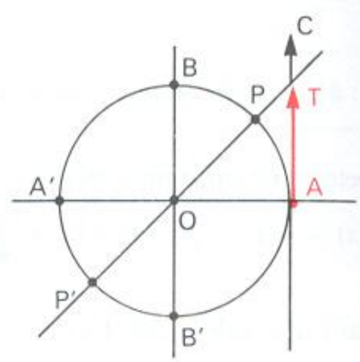


Fig 20

Denominamos *função tangente* a função f:D→R que associa a cada número real x, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ o real AT = tg x, isto é: f(x) = tgx.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, P está em B ou B' e então, a reta OP fica paralela ao eixo das tangente. Como neste caso não existe o ponto T, a tgx não é definida" (p 107).

- Propriedades

a) Se z está no primeiro ou terceiro quadrante, o ponto T está acima de A e AT é positivo, então tgx é positiva;

b) Se z está no segundo ou quarto quadrante, o ponto T está abaixo de A e AT é negativo, então tgx é negativa;

c) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tgx é crescente;

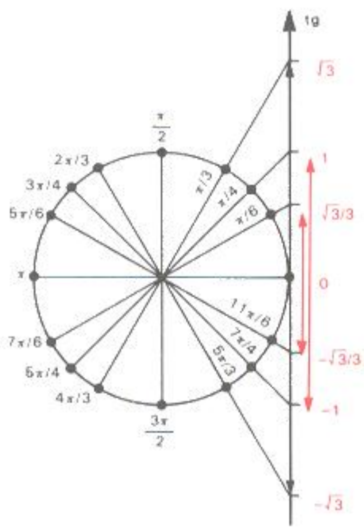
d) O domínio da função tangente é $D = \{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\}$;

e) A imagem da função tangente é R, isto é, para todo y real existe um x real tal que tgx = y;

f) A função tangente é periódica e seu período é π.

- Gráfico

"*Fazendo um diagrama com x em abscissas e tgx em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado tangentóide, que nos indica a variação da função f(x) = tgx*" (p108).



x	y = tg x
0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	$\nexists$
$2\pi/3$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/3$
π	0
2π	0

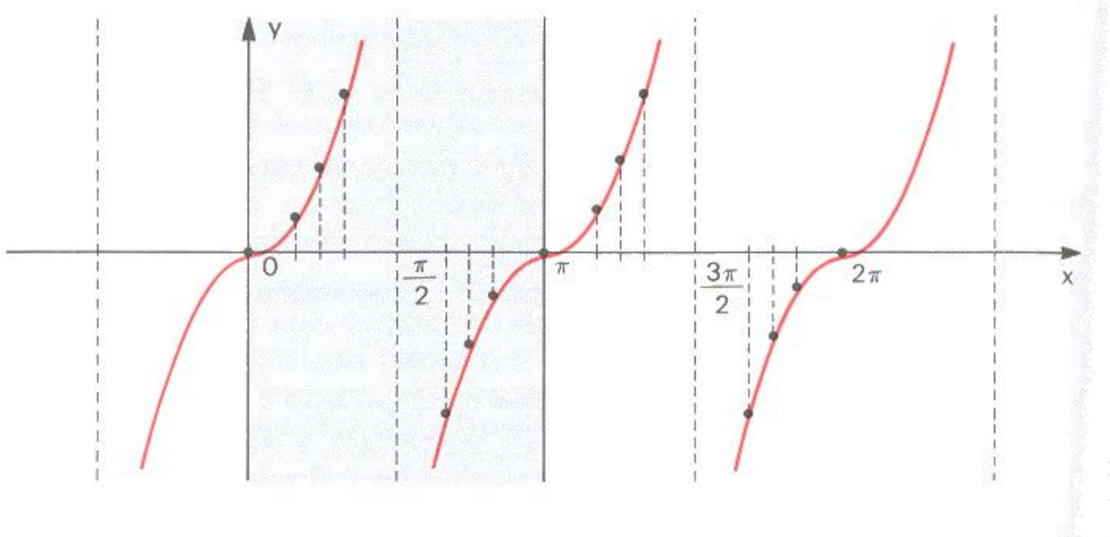


Fig 21

Remarcamos que nesse livro não é explicitada a medida em radianos, as funções são definidas em R.

Estudo dos Exercícios

Constatando que nos exercícios referentes ao estudo de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo em ambos os livros estudados o aspecto função não aparece como objeto de estudo e nem como ferramenta para a resolução de exercícios, restringimos nossa análise dos exercícios referentes à rubrica “Extensão das Funções Trigonométricas” (p. 23) do livro Wagner, Morgado e Carmo, e à rubrica “Funções Circulares” (p. 86) de Iezzi.

Os exercícios apresentados nesse trabalho forma resolvidos por mim e verificados pela orientadora.

Identificamos nos livros estudados os seguintes tipos de exercícios:

I . Valor das funções. Este tipo é subdividido em três aspectos:

I.1. Sinal das funções senθ, cosθ e tgθ.

Exemplo: Em que quadrante se tem simultaneamente senθ < 0 e cosθ > 0

Resolução: $\mathbf{sen}\,\theta\ \mathbf{< 0}$ no 3º e 4º quadrantes

$\mathbf{cos}\,\theta\ \mathbf{> 0}$ no 1º e 4º quadrantes.

Logo tem-se simultaneamente sen $\theta < 0$ e cos $\theta > 0$ no quarto quadrante.

Resposta: quarto quadrante

I.2. Quadrante do ângulo.

Exemplo: Em que quadrante pode pertencer θ se senθ = $-\frac{1}{4}$

Resolução: O seno é negativo no 3º e 4º quadrante, como $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{4}$, temos que θ pertence ao 3º e 4º quadrantes.

Resposta: 3º e 4º quadrantes.

I.3. Determinar o valor:

a) senx, cosx e tgx

Exemplo: Calcule $\text{sen}12\frac{\pi}{3}$

Resolução: $\text{sen}12\frac{\pi}{3} = \text{sen}2\pi = 0$

Resposta: 0

b) senθ, cosθ e tgθ para θ dado:

Exemplo: Calcule sen345º.

Resolução:

(345º - 360º) = -15º

sabemos que –15º = (30º - 45º)

sen345° = sen-15° = sen(30º-45º) = sen30°cos45° - sen45°cos30° =

$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$

Resposta: $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$

II . Verificar identidades trigonométricas.

Exemplo: Verifique a igualdade $\frac{\cos x}{1+senx} = \frac{1-senx}{\cos x}$ para todo x $\neq$ 2nπ $\pm \frac{\pi}{2}$ onde n é um número inteiro qualquer.

Resolução: $\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}.\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x - \cos x \operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}{1-(1-\cos^2 x)} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$

III . Determinar x tal que f(x) = K, K $\in$R e f(x) = senx, cosx ou tgx

Exemplo: Determinar o conjunto dos números reais x para os quais cos x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to x = 3\frac{\pi}{4}$, e $x = 5\frac{\pi}{4}$ $(\text{em } [0,2\pi])$

O cosseno é negativo (<0) no 2º e 3º quadrantes.

No segundo quadrante temos: $3\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2K\pi$ com k$\in$Z

No terceiro quadrante temos: $5\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ com k$\in$Z

Resposta: $x = \frac{3\pi}{4} + 2K\pi$, ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, com k$\in$Z.

IV . Resolver equações trigonométricas.

Exemplo: Encontre as 3 menores soluções positivas da equação cox(3x - $\frac{\pi}{4}$) = 0.

Resolução: cosθ = 0 $\rightarrow$θ = $\frac{\pi}{2}$, 3$\frac{\pi}{2}$, 5$\frac{\pi}{2}$, 7$\frac{\pi}{2}$,.....

como θ = 3x - $\frac{\pi}{4}$ temos que:

1ª) 3x - $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$3x = 3$\frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ x = $\frac{\pi}{4}$

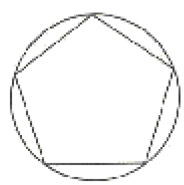
2ª) 3x - $\frac{\pi}{4}$ =3 $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$3x = 7$\frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ x = 7$\frac{\pi}{12}$

3ª) 3x - $\frac{\pi}{4}$ = 5$\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$3x = 11$\frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ x =11 $\frac{\pi}{12}$

Resposta: $\frac{\pi}{4}$, 7$\frac{\pi}{12}$ e 11$\frac{\pi}{12}$

V . Demonstrar envolvendo polígono regular e circulo inscrito.

Exemplo: Mostre que o perímetro de um pentágono regular inscrito em um circulo unitário é dado por 10sen$\frac{\pi}{5}$



Resolução: 1º Marca o centro da circunferência.

2º Faz uma reta do centro da circunferência aos vértices do pentágono, formando 5 triângulos.

3º Marca a mediatriz de cada lado (*l*) do pentágono ($\frac{l}{2}$ = a), unindo ao centro da circunferência, temos assim 10 triângulos onde a hipotenusa é 1 (que é o raio), e um dos lados do triângulo é $\frac{l}{2}$ = a.

Quando dividimos o ângulo interno da circunferência em 10 pedaços temos $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$, temos assim que: $sen\frac{\pi}{5} = \frac{a}{1} \rightarrow a = sen\frac{\pi}{5}$. O perímetro p = 10 a $\rightarrow 10sen\frac{\pi}{5}$

Resposta: $p = 10 sen \frac{\pi}{5}$

VI. Determinar o valor máximo e o valor mínimo de função.

Exemplo: Determinar para que valor de x a função y = 5 – cos(x + $\frac{\pi}{5}$) assume seu valor máximo

Resolução: Como o valor do cosseno varia de –1 a 1, temos que o valor máximo da função y é 6 quando cos(x + $\frac{\pi}{5}$) = -1

$y_{máx}$ = 6, assim y é maximo quando cos(x + $\frac{\pi}{5}$) = -1

$$x + \frac{\pi}{5} = \pi + 2k\pi$$

$$x = 4\frac{\pi}{5} + 2k\pi, \text{ com } k \in Z.$$

Resposta: x = $4\frac{\pi}{5}$ + 2kπ, com k$\in$Z.

VII . Valores distintos de f(kx), com k inteiro e x dado f (seno, cosseno e tangente).

Exemplo: Quantos são os valores distintos de cos k$\frac{\pi}{3}$, k Є Z?

Resolução:

k = 0 → cos0º = 1

k = 1 → $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

k = 2→ $\cos 2\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

k = 3→ $\cos 3\frac{\pi}{3} = \cos \pi = -1$

k = 4→ $\cos 4\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

k = 5→ $\cos 5\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

k = 6 → cos 2π = 1

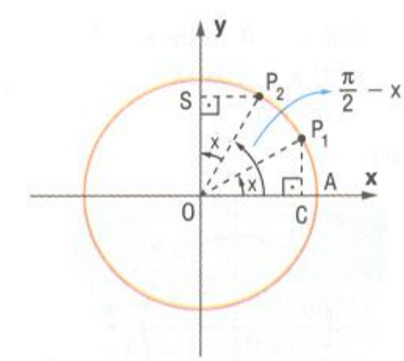
Note que para k = 2 e k = 4, o valor do cosseno é o mesmo, e para k = 1 e k = 5 também é o mesmo. O valor do cosseno vai se repetindo, logo temos 4 valores distintos.

Resposta: 4 valores distintos (1, $\frac{1}{2}$, -$\frac{1}{2}$, -1).

VIII. Verificar simetria de arcos (em relação ao eixo e em relação à origem).

Exemplo: Verifique que as extremidades dos arcos x e $\frac{\pi}{2}$ - x são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Conclua que sen($\frac{\pi}{2}$ - x) = cosx e cos($\frac{\pi}{2}$ - x) = senx.

Resolução:Vamos considerar um arco de medida x e o arco de medida $\frac{\pi}{2}$ - x, com x no 1º quadrante, por exemplo, considerando-se o ciclo trigonométrico



temos: $\Delta OCP_1 \cong \Delta OSP_2$

Daí: $\overline{OC} = \overline{OS}$ e $CP_1 = SP_2$

Mas $\overline{OC}$ = cosx , $\overline{OS}$ = sen($\frac{\pi}{2}$ - x), CP_1= senx e

SP_2 = cos($\frac{\pi}{2}$ - x)

Logo temos que sen($\frac{\pi}{2}$ - x) = cosx e cos($\frac{\pi}{2}$ - x) = senx

IX . Determinar imagens.

Exemplo: Determinar a imagem da função secx.

Resolução: Por definição temos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, para todo x∈R tal que cosx ≠ 0, ou seja, secante de x é o inverso do cosseno de x. Sabemos que –1≤ cosx ≤1. Se um número real diferente de zero esta entre –1 e1, então o seu inverso é > 1 ou < -1. Logo a imagem da função secante é (- ∞ , -1] ∪ [1 , -∞).

Resposta: (- ∞ , -1] ∪ [1 , -∞).

X .Dado f(x), calcular senx, cosx.

Exemplo: Se x está no segundo quadrante e tg x = -2$\sqrt{2}$, calcule as demais funções de x.

Resolução: $\cot gx = \frac{1}{tgx} \rightarrow \cot gx = \frac{1}{-2\sqrt{2}} \rightarrow \cot gx = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

$\sec^2 x = 1 + tg^2 x \rightarrow \sec^2 x = 1 + (-2\sqrt{2})^2 \rightarrow \sec^2 x = 1+8 \rightarrow$ secx = ± 3 Como x está no 2º quadrante temos secx = -3

$\text{cossec}^2x = 1+\text{cotg}^2x \rightarrow \text{cossec}^2x = 1+\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)^2 \rightarrow \text{cossec}^2x = 1+\frac{2}{16} \rightarrow \text{cossec}x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} \rightarrow -3 = \frac{1}{\cos x} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$

$\cos\sec x = \frac{1}{senx} \rightarrow 3\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\text{sen}\, x} \rightarrow \text{sen}x = \frac{4}{3\sqrt{2}} \rightarrow \text{sen}x = 2\frac{\sqrt{2}}{3}$

Resposta: senx = $2\frac{\sqrt{2}}{3}$, cosx = $-\frac{1}{3}$, cossecx = $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, secx = -3 e $\cot gx = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

XI . Provar identidades através de condição dada.

Exemplo: Sabendo que $\text{sen}^2x + \text{sen}x = 1$, provar que $\cos^4x + \cos^2x = 1$

Resolução:

Sabemos da relação fundamental que $\text{sen}^2x + \cos^2 x = 1$, logo temos que:

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$senx = (1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$

$\text{sen}^2x + \text{sen}x = 1$

$1-\cos^2 x + (1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} = 1$

$-\cos^2 x + (1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} = 0$

$(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} = \cos^4 x$

$1-\cos^2 x = \cos^4 x$

$\cos^2 x + \cos^4 x = 1$

Resposta: se $\text{sen}^2x + \text{sen}x = 1$, temos que $\cos^4x + \cos^2x = 1$.

XII. Determinar uma incógnita (m) do valor da imagem, condicionada à existência de x tal que f(x) = a.

Exemplo : Calcular m para que exista um ângulo x com $\cos x = \frac{2}{m-1}$ e tg x = $\sqrt{m-2}$.

Resolução:

tg x = $\sqrt{m-2}$

$\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \sqrt{m-2}$

$\text{sen}\, x = cox\sqrt{m-2}$

senx = $\frac{2}{m-1}\sqrt{m-2}$

tgx = $\sqrt{m-2}$

sen^2x + $\cos^2$x = 1

$\left(\frac{2\sqrt{m-2}}{m-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{m-1}\right)^2 = 1$

$(m-1)^2 = 4(m-2) + 4$

$m^2 - 6m + 5 = 0$

m' = 1 e m'' = 5

para m = 1 temos tgx = $\sqrt{1-2} \rightarrow$ tgx $\sqrt{-1} \notin$

para m = 5 temos tgx = $\sqrt{5-2} \rightarrow$ tgx $\sqrt{3}$

Resposta: m = 5

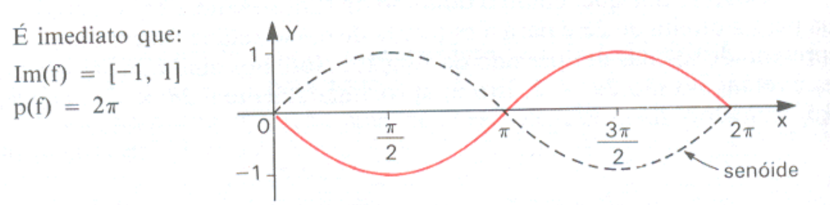
XIII . Determinar o período, a imagem e construir gráfico. Subdivido em 5 aspectos

XIII.1 . f(x) = a senx com a Є R

Exemplo: Determinar o período a imagem e fazer o gráfico de um período completo da função f : R $\rightarrow$R,dada por f(x) = - senx.

Resolução:

x	senx	y = -senx
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
π	0	0
$3\frac{\pi}{2}$	-1	1
2π	0	0



Resposta: p(f) = 2π, Im(f) = [-1,1]

XIII.2. f(x) = $|asenx|$ com a € R

Exemplo: Determinar o período a imagem e fazer o gráfico de um período completo da função f : R $\rightarrow$R.dada f(x) =.$|senx|$

Resolução: (Iezzi p.97)

Solução

Recordemos inicialmente que, para um dado número real *a*, temos:

$a \geqslant 0 \implies |a| = a$

$a < 0 \implies |a| = -a$

Aplicando esta definição, temos:

$\text{sen } x \geqslant 0 \implies |\text{sen } x| = \text{sen } x$

(quando *sen x* ⩾ *0*, os gráficos $y = |sen\ x|$ e $y = sen\ x$ coincidem)

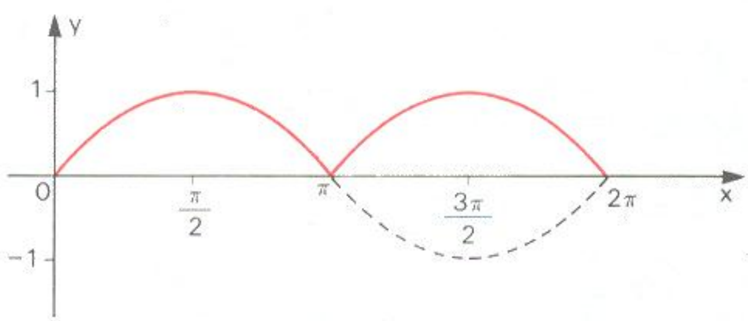
$\text{sen } x < 0 \implies |\text{sen } x| = -\text{sen } x$

(quando *sen x* < *0*, os gráficos $y = |sen\ x|$ e $y = sen\ x$ são simétricos em relação ao eixo dos *x*).

É imediato que:

$Im(f) = [0, 1]$

$p(f) = \pi$



XIII.3.f(x) = a senbx com a e b Є R

Exemplo:Determinar o período a imagem e fazer o gráfico de um período completo da função f : R $\rightarrow$R.dada f(x) = sen3x

Resolução: (Iezzi p.99)

Solução

x	t = 3x	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

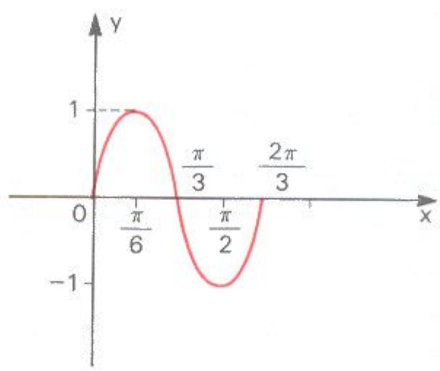
x	t = 3x	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	t = 3x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	π	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{2\pi}{3}$	2π	0

É imediato que:

$Im(f) = [-1, 1]$

$p(f) = \frac{2\pi}{3}$



XIII. 4. f(x) = c + a senbx com a, b e c Є R

Exemplo: Determinar o período a imagem e fazer o gráfico de um período completo da função f : R $\rightarrow$R.dada f(x) = 1 + senx.

Resolução: (Iezzi p.100)

Solução

x	senx	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

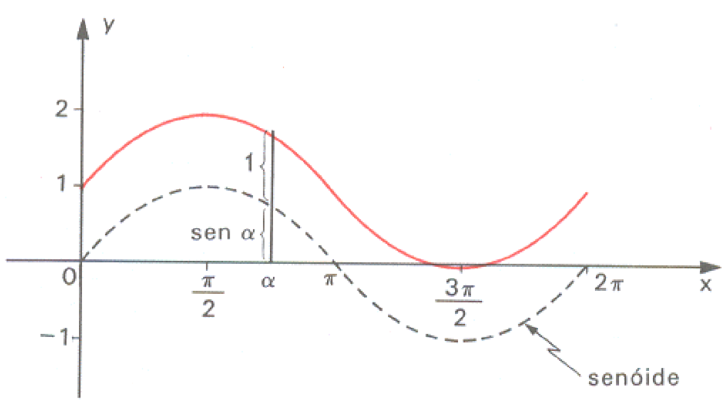
x	sen x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é igual ao seno de x mais uma unidade. Se cada seno sofre um acréscimo de 1, então a senóide sofre uma translação de uma unidade "para cima".

É imediato que:

Im(f) = [0, 2]

p(f) = 2π



XIII.5. f(x) = c + a sem(x – d) com a, b e d Є R

Exemplo: Determinar o período a imagem e fazer o gráfico de um período completo da função f : R $\rightarrow$R.dada f(x) = $sen(x - \frac{\pi}{4})$

Resolução: (Iezzi p.101)

Solução

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

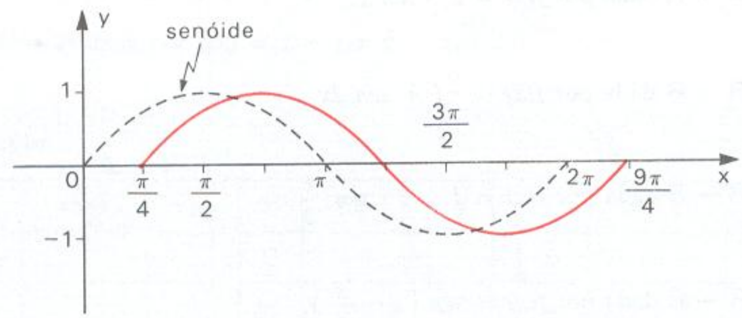
x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	−1
	2π	0

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{4}$	π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	−1
$\frac{9\pi}{4}$	2π	0

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno de $x - \frac{\pi}{4}$. Notemos que para *sen t* completar um período é necessário que $t = x - \frac{\pi}{4}$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, x percorra o intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$. Assim, o período de f é:

$$p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

É imediato que:
Im(f) = [−1, 1].



XIV. Determinar Imagem e o Período das funções seno, cosseno, e tangente.

Exemplo: Sendo a, b, c, d números reais positivos, determinar imagem e período da função

f : R $\rightarrow$R dada por f(x) = a + b sen(cx + d).

Resolução:Para completar um período é necessário que t varie de 0 a 2π.

Para t = 0 temos: cx + d = 0 $\rightarrow$ $x = \dfrac{-d}{c}$

Para t = 2π temos: cx + d = π $\rightarrow$ $x = \dfrac{2\pi - d}{c}$

Portanto p = $\Delta x = \left(\dfrac{2\pi - d}{c}\right) - \left(\dfrac{-d}{c}\right) = \dfrac{2\pi}{c}$

Imagem de b sen(cx + d) = [-b , b]

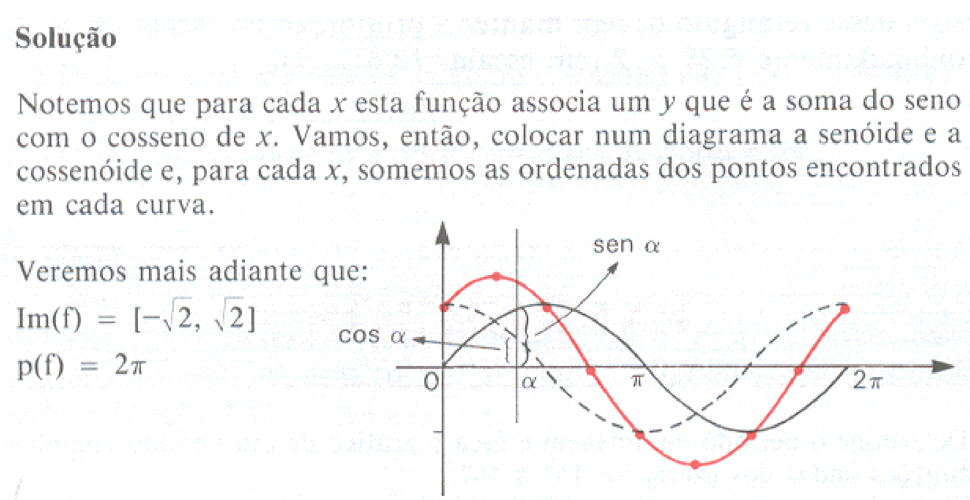
Imagem de a + b sen(cx + d) = [a-b , a+b].

Resposta: [a-b,a+b]

XV . Construir gráfico envolvendo mais do que uma função.

Exemplo: Esboçar o gráfico da função f : R $\rightarrow$R tal que f(x) = senx + cosx.

Resolução: (Iezzi p.106)



Solução

Notemos que para cada x esta função associa um y que é a soma do seno com o cosseno de x. Vamos, então, colocar num diagrama a senóide e a cossenóide e, para cada x, somemos as ordenadas dos pontos encontrados em cada curva.

Veremos mais adiante que:

$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$p(f) = 2\pi$

XVI. Provar desigualdades através de condições dadas.

Exemplo: Provar que se $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ então senx + cosx > 1

Resolução: x = $\frac{\pi}{6}$ temos senx + cosx = $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

x = $\frac{\pi}{4}$ temos senx + cosx = $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

...

a soma é sempre maior do que 1 (um).

XVII . Determinar o domínio das funções senx, cosx, tgx.

Exemplo: Qual o domínio da seguinte função f(x) = tg 3x

Resolução: 3x $\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ com K∈Z

x $\neq \frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$ com K∈Z

Resposta: x $\neq \frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$ com k∈Z

Tipos de Exercícios	**Quantidades de Exercícios segundo Carmo, Morgado e Wagner**	**Quantidades de Exercícios segundo Iezzi**
I - Valor das funções	-	-
I.1 . Sinal das funções senθ, cosθ e tgθ.	-	-
a) senx, cosx e tgx	-	-
b) senθ, cosθ e tgθ	10	-
I.2.Quadrante do ângulo.	8	-
I.3. Determinar o valor.	-	-
a) senx, cosx e tgx	3	-
b) senθ, cosθ e tgθ	6	-
II – Verificar identidades trigonométricas	12	-
III - Determinar x tal que f(x) = k, k $\in$R e f(x) = senx, cosx ou tgx	2	-

IV – Resolver equações trigonométricas.	4	-
V - Mostrar que: envolvendo polígono regular e circulo inscrito.	2	-
VI – Valor máximo e valor mínimo de uma função.	1	-
VII – Valores distintos de f(kx), com k inteiro e x dado f: seno, cosseno e tangente.	1	-
VIII – Verificar simetria de arcos (em relação ao eixo e em relação a origem).	18	-
IX – Determinar Imagens.	3	-
X – Dado f(x), calcular senx, cosx.	1	-
XI - Provar identidades através de condição dada.	9	-
XII – Determinar uma incógnita (m) do valor da imagem condicionada a existência de x tal que f(x) = a.	1	5
XIII – Determinar o período, a imagem e construir gráfico. XIII.1 . f(x) = a senx com a Є R XIII.2. f(x) = $\lvert a \operatorname{sen} x \rvert$ com a Є R XIII.3.f(x) = a senbx com a e b Є R XIII.4. f(x) = c + a senbx com a, b e c Є R XIII.5. f(x) = c + a sem(x – d) com a, b e d Є R	 - - - - -	 6 - 3 10 9
XIV – Determinar Imagem e o Período das funções seno, cosseno, e tangente.	-	3
XV – Construir gráfico envolvendo mais do que uma função	-	2
XVI – Provar desigualdades através de condições dadas.	-	1
XVII – Determinar o domínio das funções senx, cosx, tgx.	-	-
a) senx, cosx e tgx	-	3
b) senθ, cosθ e tgθ	-	3
Total de exercícios estudados	**81**	**48**

Observe que Iezzi, na rubrica estudada[7], da mais ênfase aos exercícios de domínio, imagem, período e principalmente construção gráfica. Temos $\frac{34}{48}$ exercícios que enquadram-se nesse tipo. Enquanto nos exercícios propostos por Wagner, Morgado e Carmo não há nenhum exercício de construção gráfica. Wagner dá mais ênfase aos exercícios que pedem para determinar-se o valor da função, sendo, no total, $\frac{27}{81}$ exercícios que se classificam nesse tipo. Notemos que o tipo de exercício XII é o único encontrado nas duas abordagens.

---

[7] Na rubrica "Razões trigonométricas na Circunferência", Iezzi propõe para estudo os outros tipos exercícios que encontramos na abordagem de Wagner, Morgado e Carmo.

Capítulo IV

A Trigonometria Como Saber Ensinado

Livros Didáticos

Para identificar elementos do saber "funções trigonométricas" (senx, cosx e tgx), como saber que é proposto na escola para ser ensinado, escolhemos para estudo os livros didáticos: "Matemática Fundamental", de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr e "Matemática Contexto e Contextualizações" de Luiz Roberto Dante.

Estes livros têm como objetivo fazer com que o aluno entenda as idéias básicas da matemática no nível de ensino médio.

Escolhemos estes livros pelo fato de que foram aprovados pelo MEC. Este quesito assegura-nos a possibilidade de que os livros sejam usados no ensino médio como livro texto de uma classe.

O objetivo deste estudo é explicitar a abordagem e o tipo de exercícios usados pelos autores.

Abordagem do Livro: "Matemática Fundamental" de José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni Jr

No estudo de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr tratam de "razão trigonométrica"

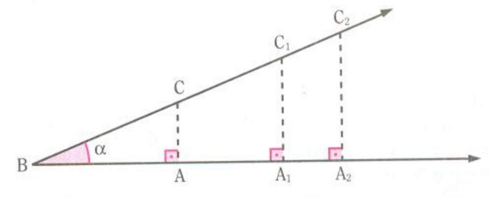


Fig 22

Seno de um ângulo α é indicado por: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{AC}{BC}$

Cosseno de um ângulo α é indicado por: $\cos\alpha = \dfrac{BA}{BC}$

Tangente de um ângulo α é indicado por: $tg\alpha = \dfrac{AC}{BA}$

"*Os números senα, cosα e tg α são chamados de razões trigonométricas do ângulo agudo α e não dependem dos pontos A, A_1, A_2, ...(só variam quando variar o ângulo)*" (p.318) Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr definem alguns conceitos básicos do qual depende o contexto de funções trigonométricas como: arco de circunferência, circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico, arcos côngruos e primeira determinação positiva de um arco.

Até o momento, Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr operam com os números senx, cosx e tgx no triângulo retângulo, em que x representa a medida de um ângulo agudo, ou seja, para ângulo menor que 90º. No estudo das funções circulares o conceito é ampliado às noções de senx, cosx e tgx para casos em que x representa medida de um ângulo maior que 90º, isto é, ângulo obtuso.

Estudo da função seno

- Definição da função seno;

Marcamos o ponto M no ciclo trigonométrico que é a imagem, no ciclo, do número real x, conforme a figura 23.

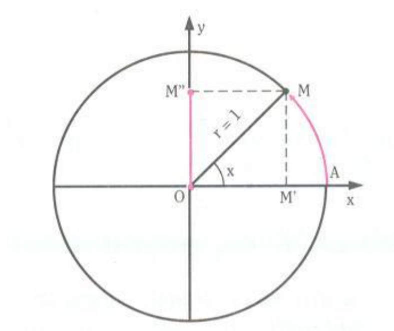


Fig 23

Consideramos também o arco AM ao qual corresponde o ângulo central x.

Seja OM o raio do ciclo e M"e M' as projeções do ponto M nos eixos y e x, respectivamente.

Definimos como sen (do arco AM ou do ângulo x) a ordenada do ponto M, e indicamos: senx = OM" $\rightarrow$ OM" é a ordenada do ponto M"

- Valores de senx de alguns arcos

Marcando os pontos M, imagem dos números reais, 0, $\dfrac{\pi}{2}, \pi$, $\dfrac{3\pi}{2}$ e 2π, temos:

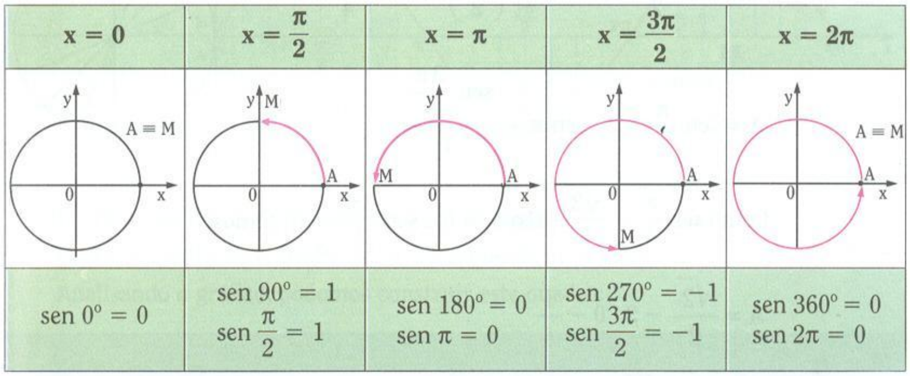


Fig 24

Vejamos um dos três exemplos citados pelo autor.

Exemplo: Calcular sen$19\dfrac{\pi}{3}$

Resolução: Vamos calcular a 1ª determinação positiva:

$$\frac{19\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{19}{6}=\frac{18}{6}+\frac{1}{6}=3+\frac{1}{6}$$

$$\frac{19}{3}=\left(\frac{1}{6}+3\right).2\pi=\frac{\pi}{3}+3.2\pi$$

$$sen19\frac{\pi}{3}=sen\frac{\pi}{3}=sen60^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- Gráfico

Estudo da função senx, com x variando do intervalo]0, ∞[, isto é , o ponto M parte da ponta A e se movimenta sobre o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário.

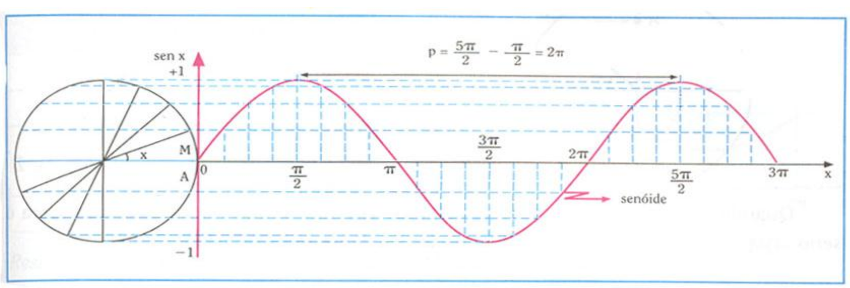


Fig 25

O gráfico da função seno é chamado de senóide.

Pelas observações do gráfico concluímos[8] que:

- o gráfico continua a direita de 2π e à esquerda de 0 (zero)
- o domínio da função senx é o conjunto dos números reais
- a imagem da função senx é o intervalo [-1, +1], isto é $-1 \leq \text{senx} \leq 1$.
- a partir de 2π , função seno repete seus valores, portanto é uma função periódica.

Observa-se que a partir de um determinado valor de x $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, cada vez que somamos 2π, a função seno assume sempre o mesmo valor (+1); portanto o período da função seno é $p = 2\pi$.

Esta conclusão pode ser obtida a partir do ciclo trigonométrico no qual marcamos o arco x (p. 341).

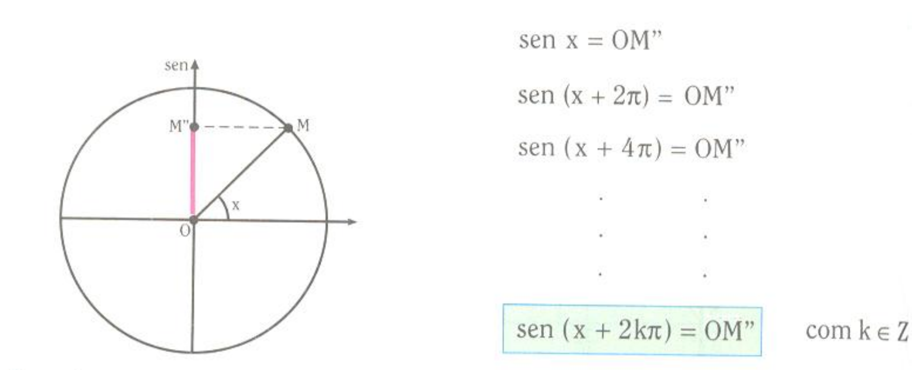


Fig 26

Quando somamos $2K\pi$ ao arco x, estamos obtendo sempre o mesmo valor para o seno (OM"); portanto, a função seno é periódica de período 2π, isto é:

$\text{senx} = \text{sen}(x + 2k\pi)$ com $k \in Z$.

A função y = senx é ímpar

[8] Conclusões apenas citadas pelo autor.

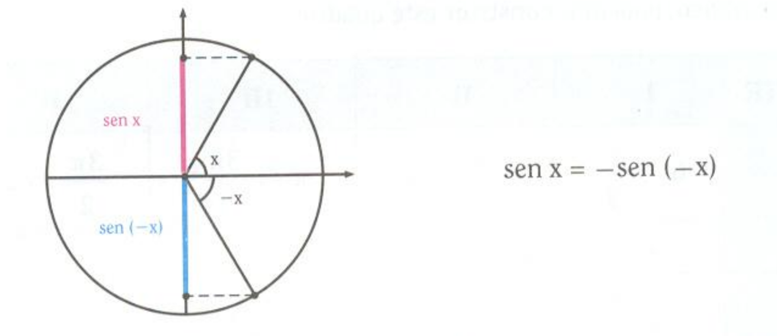


Fig 27

Estudo da função cosseno

- Definição da função cosseno

Marcamos o ponto M no ciclo trigonométrico que é a imagem, no ciclo, do número real x, conforme a figura.

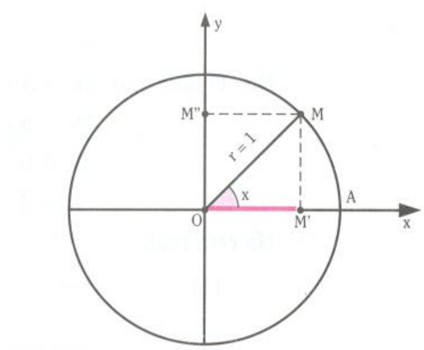


Fig 28

Consideramos também o arco AM ao qual corresponde o ângulo central x.

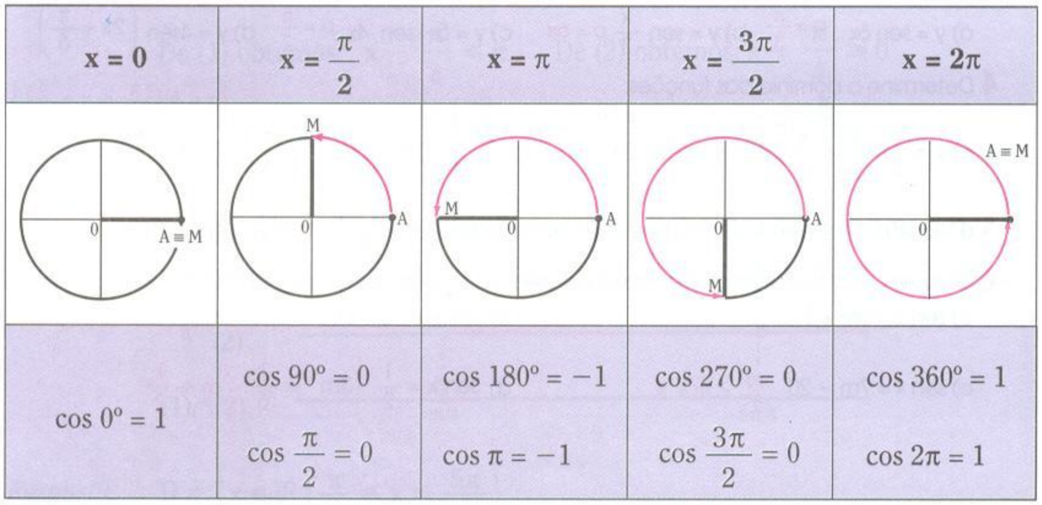
Seja OM o raio do ciclo e M"e M' as projeções do ponto M nos eixos y e x, respectivamente.

Definimos como cosseno (do arco AM ou do ângulo x) a abscissa do ponto M (OM'), e indicamos:

cosx = OM'.

- Valores de cosx de alguns arcos

Marcando os pontos M, imagens dos números reais, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2 π, temos:



$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
A ≡ M	M, A	M, A	A, M	A ≡ M
$\cos 0^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\cos 180^\circ = -1$ $\cos \pi = -1$	$\cos 270^\circ = 0$ $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$	$\cos 360^\circ = 1$ $\cos 2\pi = 1$

Fig 29

Vejamos um dos dois exemplos apresentados por Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr

Exemplo: Calcular cos1830º

Resolução:

1830º	360º
030º	5

$1830^\circ = 30^\circ + 5.360^\circ$

Então: $\cos 1830^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- Gráfico

Estudo da função cosx, com x variando do intervalo]0, ∞[, isto é , o ponto M parte da ponta A e se movimenta sobre o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário.

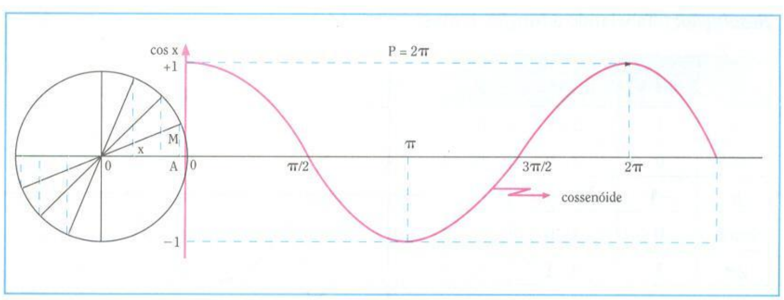


Fig 30

O gráfico da função cosseno é chamado de cossenóide.

Observando o gráfico concluímos que:

- o domínio da função cosx é os reais, isto é, D = R.
- o gráfico continua a direita de 2π E à esquerda de 0 (zero)
- a imagem da função cosx é o intervalo [-1, +1], isto é $-1 \leq$ cosx ≤ 1.
- o período da função cosseno é igual a 2π, isto é, cosx = cos(x+2kπ), com k Є Z.

A função y = cosx é par.

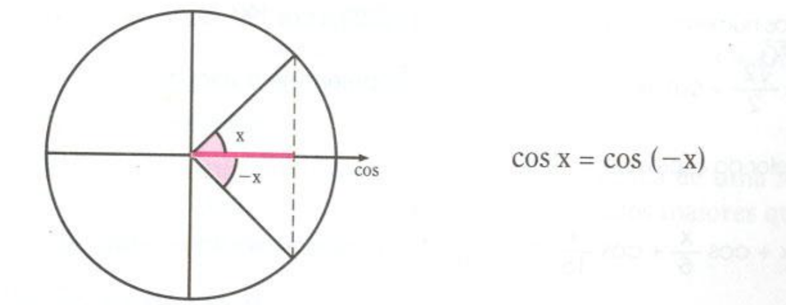


Fig 31

Estudo da função tangente

- Definição da função tangente

Seja o ciclo trigonométrico da Fig 32 e T a intersecção da reta OM com o eixo das tangentes.

Definimos como tangente (do arco AM ou do ângulo x) a medida algébrica do segmento AT, e indicamos: tg x = AT.

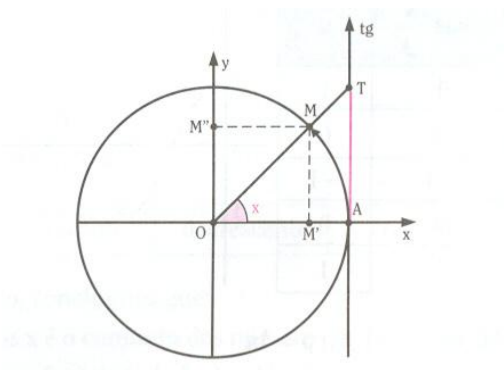


Fig 32

Observe que nos triângulos retângulos OM’M e OAT, temos: ΔOM’M ~ ΔOAT

$$\frac{OM'}{OA} = \frac{M'M}{AT}$$

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{senx}{AT}$$

$$AT = \frac{senx}{\cos x} = tgx \rightarrow \text{cosx} \neq \text{o; isto é, x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- Valores importantes da tgx

$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
$tg\ 0 = 0$	$tg\ \frac{\pi}{2} \rightarrow \nexists$ $tg\ 90^o \rightarrow \nexists$	$tg\ \pi = 0$ $tg\ 180^o = 0$	$tg\ \frac{3\pi}{2} \rightarrow \nexists$ $tg\ 270^o \rightarrow \nexists$	$tg\ 2\pi = 0$ $tg\ 360^o = 0$

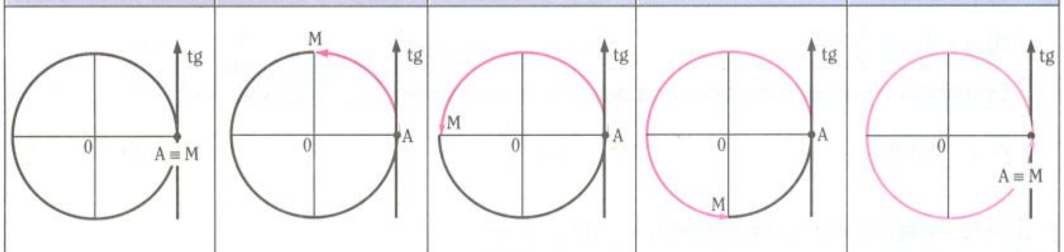


Fig 33

- Gráfico

Estudo da função tgx, com x variando do intervalo]0, ∞[, isto é , o ponto M parte da ponta A e se movimenta sobre o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário.

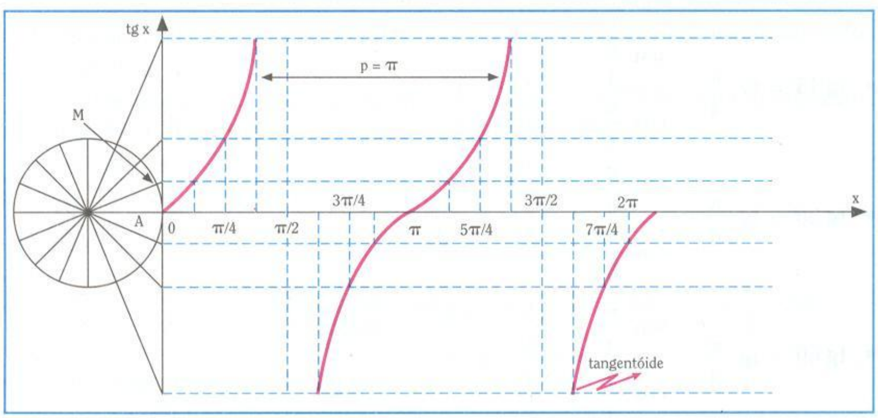


Fig 34

O gráfico da função tangente é chamado de tangentoíde.

"Observando o gráfico concluímos que:

- o domínio da função tgx é D ={x Є R/ x $\neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ }, com k Є Z.
- a imagem da função tgx é o intervalo]- ∞, +∞[, isto é -∞ < tgx < ∞.
- o período da função tangente de x p = π .

Esta conclusão pode ser obtida, também, a partir do ciclo trigonométrico no qual marcamos o arco x.

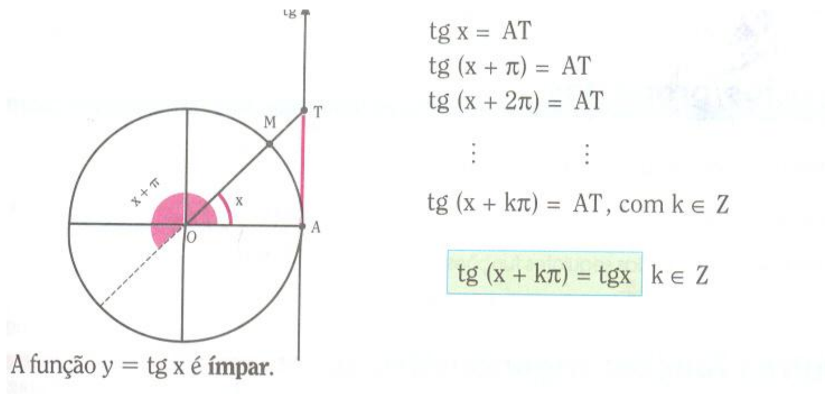


Fig 35

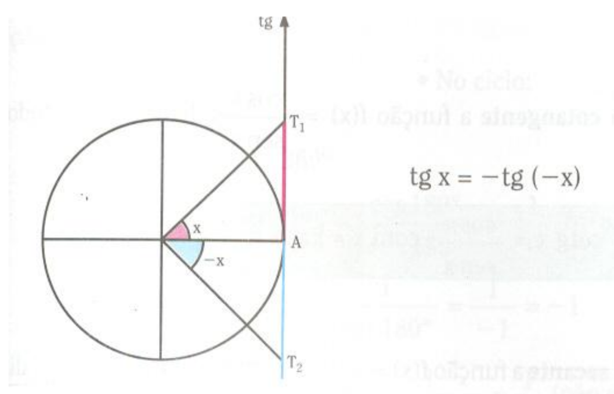


Fig 36

Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr definem “outras funções trigonométricas”, ou seja, as funções secante, cossecante e cotangente.

Redução ao Primeiro Quadrante

“Reduzir um arco dado ao primeiro quadrante é determinar um arco do primeiro quadrante cujas funções trigonométricas sejam iguais em valor absoluto às do arco dado” (p357).

A idéia de redução do segundo, do terceiro e do quarto quadrante para o primeiro é introduzida através de exemplos. Vejamos um dos exemplos citado pelos autores.

Exemplo: Calcule o valor da tg $\frac{23\pi}{4}$.

Resolução:

$$\frac{\frac{23\pi}{4}}{2\pi} = \frac{23}{8} = \frac{16}{8} + \frac{7}{8} = 2 + \frac{7}{8}$$

$$\frac{23\pi}{4} = \left(\frac{7}{8} + 2\right).2\pi = \frac{7\pi}{4} + 2.2\pi$$

Como $\frac{3\pi}{2} < \frac{7\pi}{4} < 2\pi$, podemos dizer que $\frac{7\pi}{4}$ pertence ao 4º quadrante.

$$\frac{7\pi}{4} + \mathrm{m} = 2\pi \Rightarrow m = 2\pi - \frac{7\pi}{4} \Rightarrow m = \frac{\pi}{4}$$

Daí temos:

$$sen\frac{23\pi}{4} = sen\frac{7\pi}{4} = -sen\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{23\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,\frac{23\pi}{4} = \frac{sen\,\frac{23\pi}{4}}{\cos\frac{23\pi}{4}} = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

Resposta: -1

Estudo do Livro: "Matemática Contexto e Contextualizações" de Luiz Roberto Dante

Já sabemos o significado das funções senx, cosx e tgx, em que x é a medida de um ângulo agudo (0º < x < 90º). Para ampliar essas noções para outros valores reais de x Dante define alguns conceitos como: arcos e ângulos, unidade para medir arcos de circunferência (ou ângulos), comprimento de um arco, ciclo trigonométrico, arcos côngruos (ou congruentes) e determinação de quadrante.

A idéia do seno[9]

Dado um arco AP de medida x, definimos como senx a ordenada do ponto P e representamos assim: senx = OP_2 ,em que OP_2 é a medida de um segmento orientado (pode ser positiva, negativa ou nula).

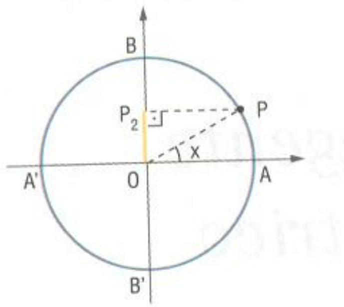


Fig 37

Redução ao 1º quadrante

Podemos determinar o seno dos arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes, usando os valores do 1º quadrante, por meio do processo conhecido como redução ao 1º quadrante.

- Do 2º para o 1º quadrante (fazendo uma simetria em relação ao eixo Oy).

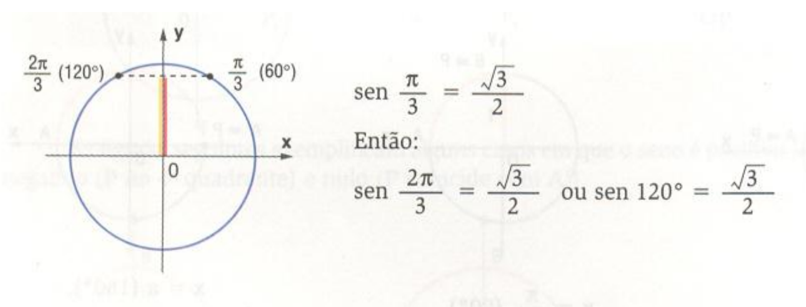


Fig 38

- Do 3º para o 1º quadrante (fazendo uma simetria em relação ao eixo O).

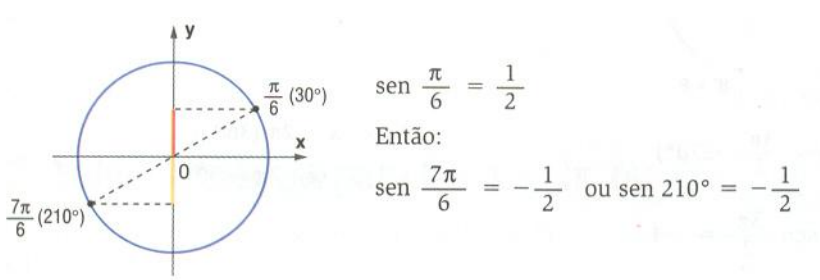


Fig 39

[9] O uso do termo “idéia do seno” é do autor.

- Do 4º para o 1º quadrante (fazendo uma simetria em relação ao eixo Ox)

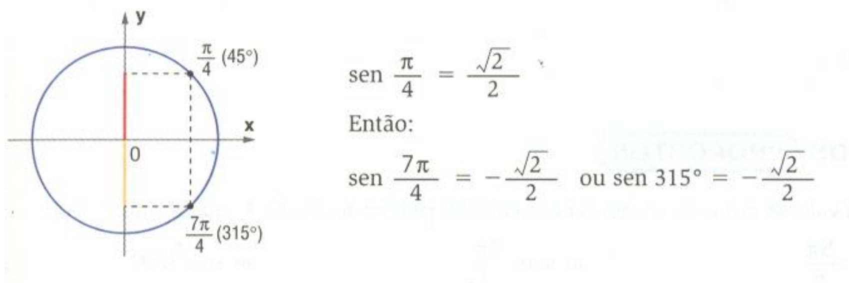


Fig 40

Generalizando da redução ao primeiro quadrante do seno:

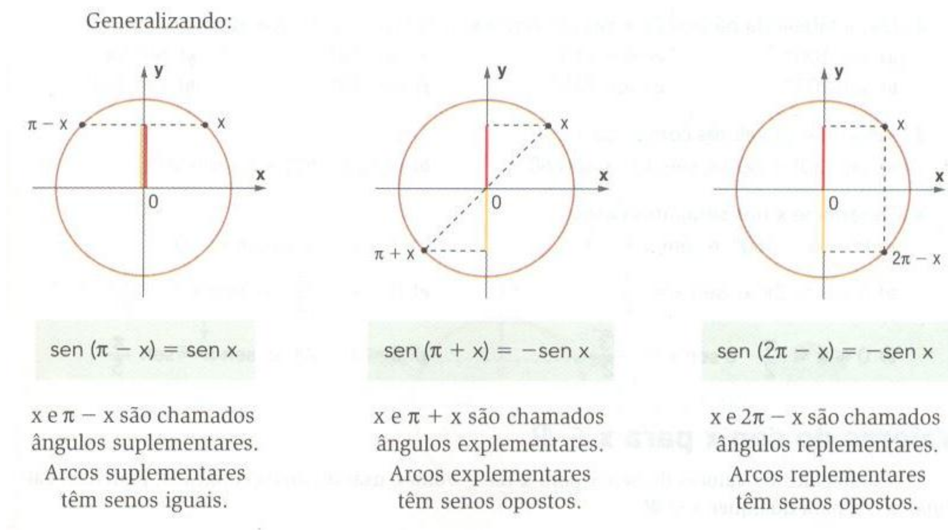


Fig 41

A idéia do Cosseno

Dado um arco AP de medida x, definimos como cosx a abscissa do ponto P e representamos assim: cosx = OP_1

Em que OP_1 é a medida de um segmento orientado (pode ser positiva, negativa ou nula).

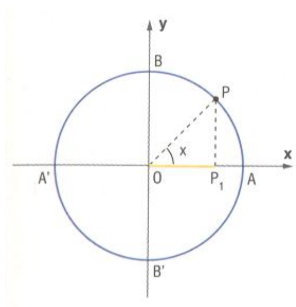
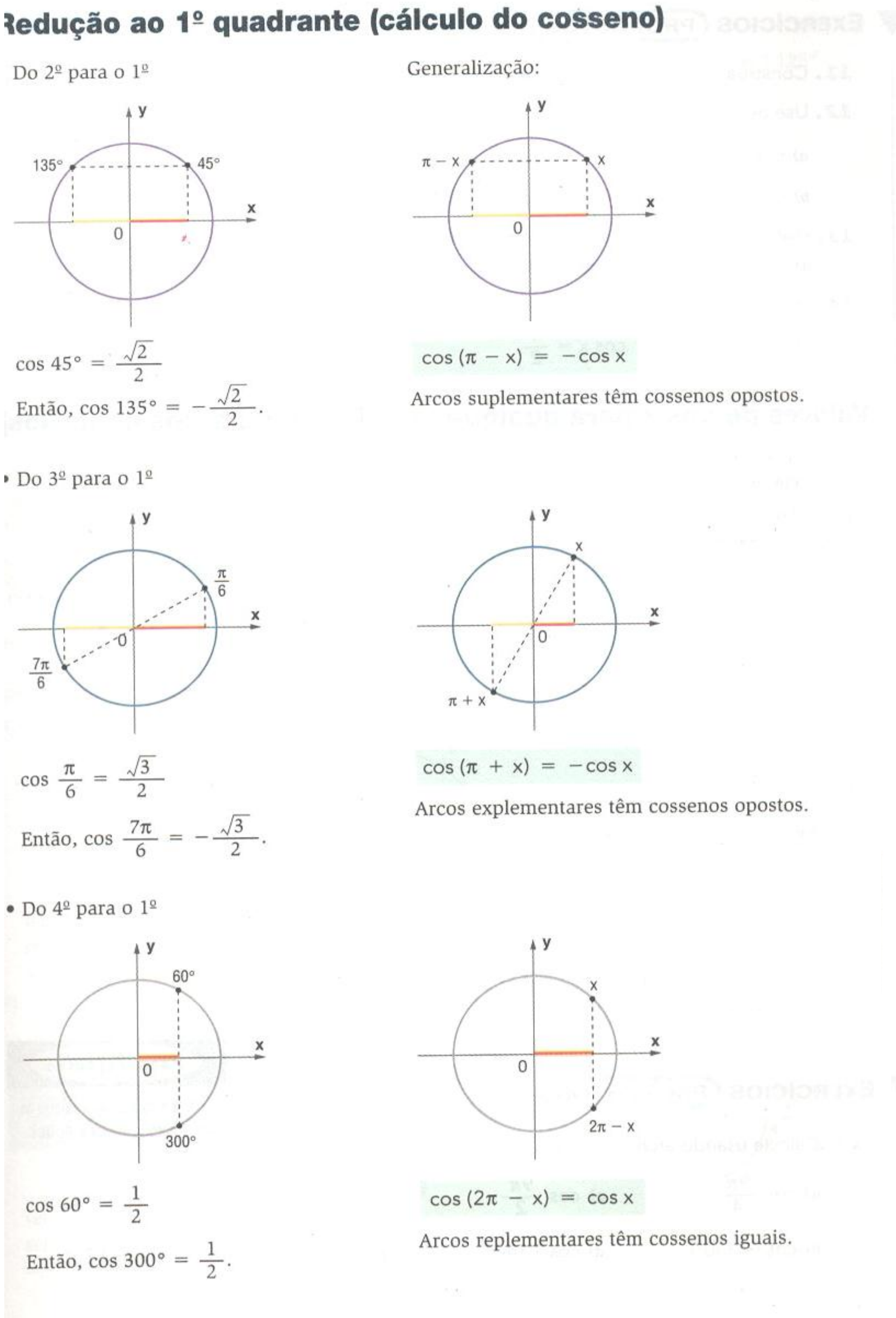


Fig 42

Generalização da redução ao primeiro quadrante do cosseno:



Redução ao 1º quadrante (cálculo do cosseno)

Do 2º para o 1º

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Então, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Generalização:

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

Arcos suplementares têm cossenos opostos.

• Do 3º para o 1º

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Então, $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

Arcos explementares têm cossenos opostos.

• Do 4º para o 1º

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

Então, $\cos 300° = \frac{1}{2}$.

$\cos(2\pi - x) = \cos x$

Arcos replementares têm cossenos iguais.

Fig 43

A idéia da tangente

Vamos considerar no ciclo trigonométrico a reta t, tangente à circunferência no ponto A, com a mesma orientação do eixo y.

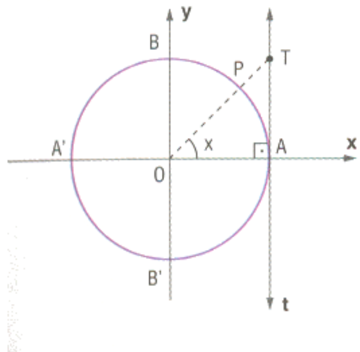


Fig 44

Dado um arco AP de medida x radianos (com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), define-se como tangente de x a medida algébrica AT, sendo T o encontro OP a t.

Generalização da Redução ao 1º quadrante da tangente.

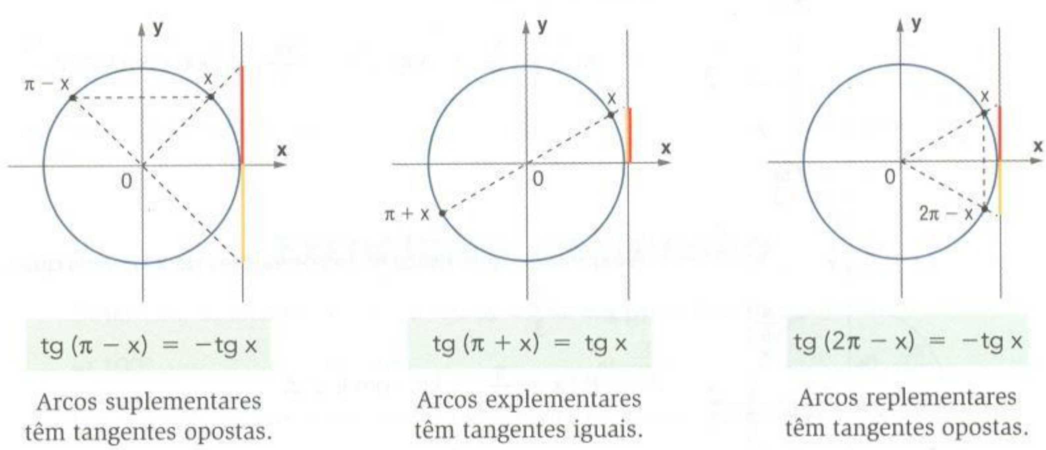


Fig 45

Relação que envolve seno, cosseno e tangente.

Observando o ciclo temos:

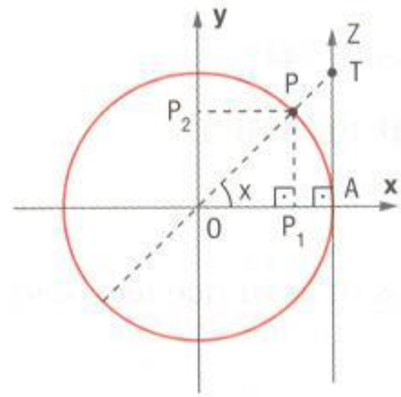


Fig 46

$\Delta OP_1P \sim \Delta OAT$

$\frac{OP_1}{OA} = \frac{PP}{AT} \Rightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{senx}{tgx} \Rightarrow tgx = \frac{senx}{\cos x}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k∈Z.

Definição da função seno.

Definimos a função seno como a função f que associa a cada número real x o número real senx sendo x dado em radianos. Indicamos assim f: R→R definida por f(x) = senx ou y = senx

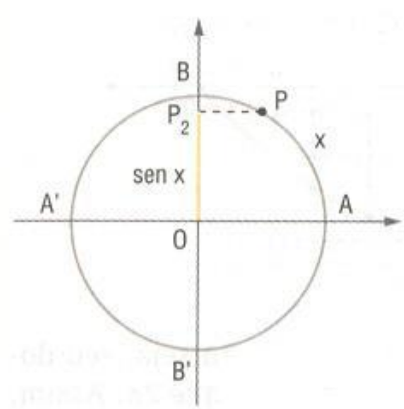


Fig 47

Veja o Gráfico da função seno para x ∈ [0,2π].

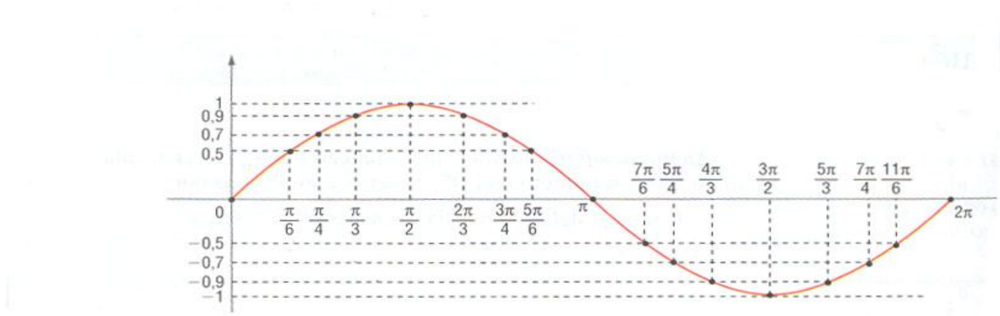


Fig 48

O gráfico da função f: R→R definida por f(x) = senx, é a curva chamada senóide

Observações sobre a função seno:

- O conjunto imagem de f(x) = senx é o intervalo [-1,1].
- A função seno não é sobrejetora, pois [-1,1] ≠ R, isto é, sua imagem não é igual ao contradomínio.
- A função seno não é injetora, pois para valores diferentes de x temos o mesmo f(x). Por exemplo: $\text{sen}\frac{\pi}{2} = sen5\frac{\pi}{2} = sen(-3\frac{\pi}{2}) = ... = 1$
- A função seno é ímpar, isto é, qualquer que seja x ЄR temos senx = -sen(-x). Por exemplo: $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $sen(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ (p 69)

- Periodicidade da função seno

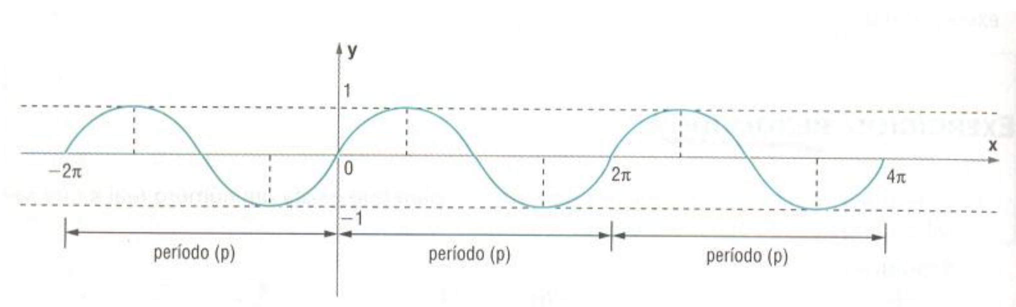


Fig 49

"*Observando o gráfico da função, vemos que a função repete periodicamente seus valores nos intervalos ...[-2π, 0], [0, 2π], [2π, 4π]...Daí dizemos que a função seno é periódica.*

Observe no gráfico que senx = sen(x + 2π) = sen(x + 4π) = ... Para todo x ЄR.

Dizemos então que o período da função é 2π e indicamos assim: p = 2π" (p 70).

Sinal da função seno

Observando o sinal da função seno, vemos que a função é *positiva* para valores do 1º e 2º quadrante e *negativa* para valores do 3º e 4º quadrante.

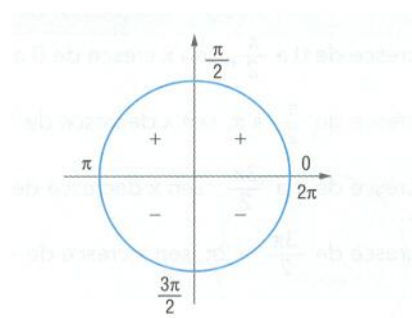


Fig 50

Definição da função cosseno

Definimos a função cosseno como a função f que associa a cada número real x o número real cosx, sendo x dado em radianos. Indicamos por f: R→R definida por

f(x) = cosx ou y = cosx

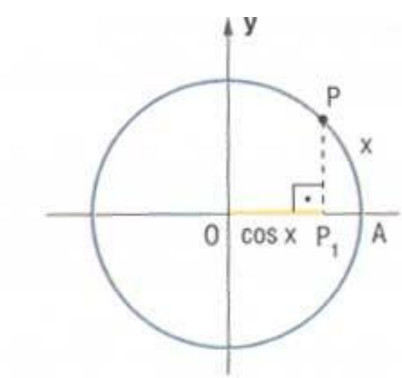


Fig 51

Veja o Gráfico da função cosseno

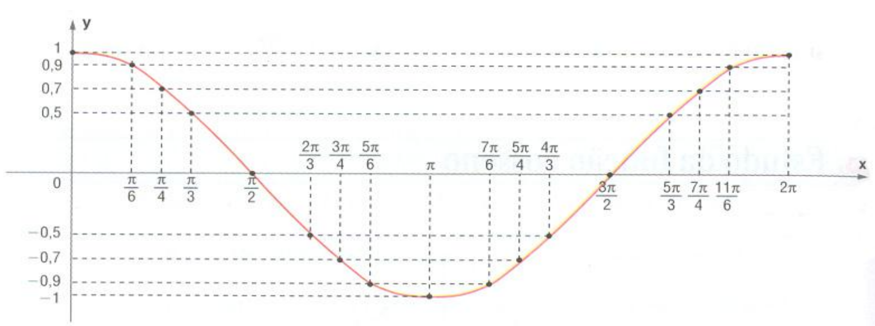


Fig 52

O gráfico da função f: R→R definida por f(x) = cosx é a curva chamada cossenóide.

Observações sobre a função cosseno:

- f: R→R tal que f(x) = cosx tem D = R e Im = [-1,1].
- A função cosseno não é injetora e nem sobrejetora.
- A função cosseno é função par.
- A função cosseno é periódica de período 2π (p 74).

Sinal da função cosseno

Observando o sinal da função f(x) = cosx, vemos que a função cosseno é *positiva* para valores do 1º e 4º quadrante e *negativa* para valores do 2º e 3º quadrante.

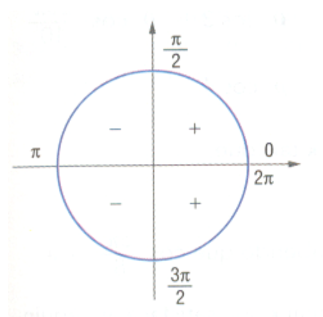


Fig 53

Definição da função Tangente

Definimos a função tangente com a função f que associa o número real x (com x ≠ $\frac{\pi}{2}+k\pi$, com k Є Z) o número real $tgx=\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ com x dado em radianos. Indicamos assim: f(x) = tg x ou y = tgx, com x ≠ $\frac{\pi}{2}+k\pi$, com k Є Z

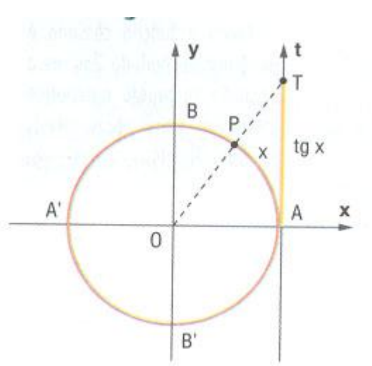


Fig 54

Veja o gráfico da função tangente:

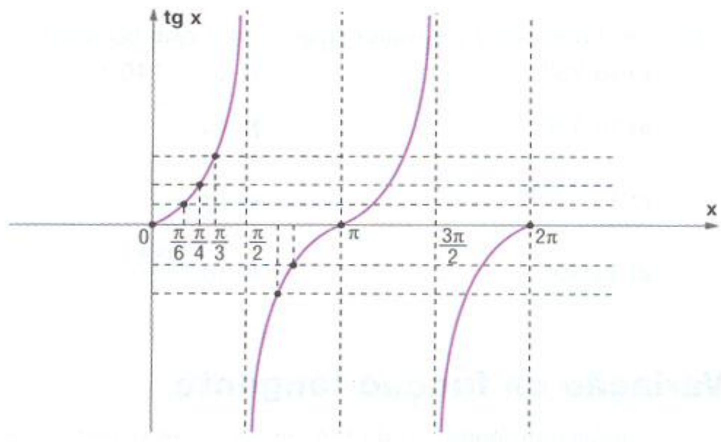


Fig 55

A partir do ciclo trigonométrico ou da relação $tgx = \frac{senx}{\cos x}$, para cosx ≠ 0, ou do gráfico, é possível fazer algumas afirmações sobre a função tangente:

- Tem D(f) = { x Є R / $x \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$, com k Є Z} e Im (f) = R
- A função tangente não é injetora, mas é sobrejetora.
- A função tangente é função ímpar, isto é, tgx = -tg(-x), ∀ x Є D(f).
- A função tangente é periódica de período p = π, isto é, tgx = tg(x + k π), com k Є Z e x ЄD(f) (p 77).

Sinal da função tangente

Observando o sinal da função tangente, vemos que a função cosseno é *positiva* para valores do 1º e 3º quadrante e *negativa* para valores do 2º e 4º quadrante.

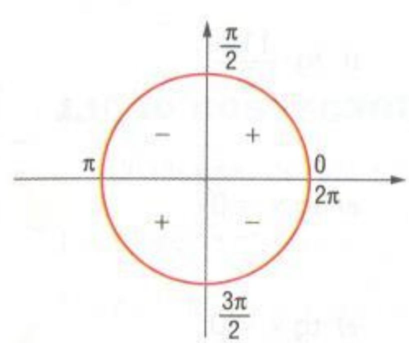


Fig 56

A partir das idéias já conhecidas de seno, cosseno e tangente de x, define-se cossecante, secante e cotangente de x. A mesma definição usada por Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr.

Estudo dos Exercícios

Restringimos nossa análise aos exercícios referentes à rubrica “As Funções Circulares” (p.338) do livro de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr e (p. 67) do livro de Luiz Roberto Dante.

Identificamos na abordagem de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr e de Dante, os seguintes tipos de exercícios diferentes dos listados no “saber a ensinar”:

XVIII. Determinar o valor da expressão envolvendo:

a) sex, cosx e tgx.

Exemplo: Sabendo que x = $\frac{\pi}{6}$, determine o valor da expressão E = 1-2 senx + sen^2x.

Resolução

$$E = 1-2\ senx + sen^2 x$$

$$E = 1-2sen\ \frac{\pi}{6} + sen^2\frac{\pi}{6}$$

$$E = 1-2\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Resposta $\frac{1}{4}$

b) senθ, cosθ e tgθ .

Exemplo: $\frac{sen(30^o+x)+\cos 3x}{tg(x-15^o)}+\frac{tg(x-60^o)}{2}$,para x = 60º

Resolução

$$\frac{\text{sen}(30^o+60^o)+\cos 3.60^o}{tg(60^o-15^o)}+\frac{tg(60^o-60^o)}{2}$$

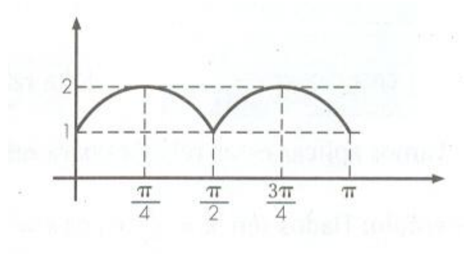
$$\frac{\text{sen}\,90^o+\cos 180^o}{tg(45^o)}+\frac{tg\,0^o}{2}$$

$$\frac{1+(-1)}{1}+0 = 0$$

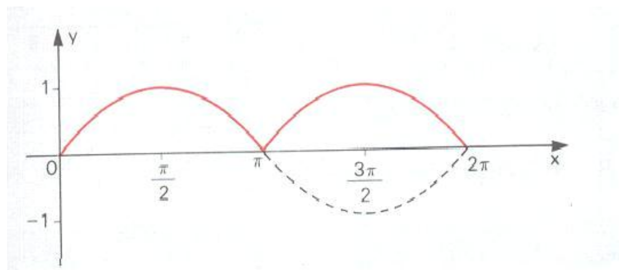
Resposta 0

XIX . Dado o gráfico, determinar a função.

Exemplo: Qual é a função que melhor se adapta ao gráfico:



Resolução: Sabemos que o gráfico da função função f(x) = $|\text{sen}\,x|$ com a Є R é:



Note que a função transladou uma unidade para cima. Além disso, há um fator multiplicativo (2) que causa o deslocamento da abscissa.

Resposta: f(x) = 1 + $|\text{sen}\,2x|$

XX . Determinar x tal que f(x) = K, K $\in$R e f(x) = senx, cosx ou tgx

Exemplo: Determinar x tal que $0 \le x \le 2\pi$ e $senx = \frac{1}{2}$.

Resolução:

$senx = \frac{1}{2} \rightarrow x \in$ primeiro ou segundo quadrantes.

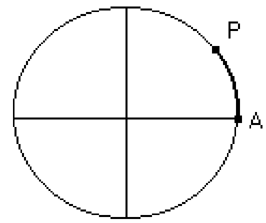
$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = 5\frac{\pi}{6}$

Resposta : $\frac{\pi}{6}$ e $5\frac{\pi}{6}$

XXI . Conhecer definição das funções senx, cosx e tgx.

Exemplo: O que representa o número real x na função cosseno?

Rsolução:



Resposta: x é a medida do arco AP em radianos

XXII. Determinar o valor de x $\in$ [0,2π] para condições dadas.

Exemplo: Determine x $\in$ [0,2π] tal que senx = cosx.

Resolução: Sabemos que: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta: $x=\frac{\pi}{4}$

XXIII. Determinar senx, cosx e tgx através de condições dadas.

Exemplo: Sabendo que α $\in$[0,2π] e $\sec\alpha=\frac{13}{12}$, determinar cos α.

Resolução:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\rightarrow\frac{13}{12}=\frac{1}{\cos\alpha}\rightarrow\cos\alpha=\frac{12}{13}$$

Resposta: $\cos\alpha=\frac{12}{13}$

XXIV . Calcular arco seno, cosseno e tangente.

Exemplo: Calcule arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

cosx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 $\leq$ x $\leq$ π $\rightarrow$ como cos $\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, logo x = $\frac{\pi}{6}$

Resposta x = $\frac{\pi}{6}$

XXV . Determinar valor do ângulo que maximize ou minimize as funções sem, cosseno e tangente.

Exemplo: Considere a função $f(x) = 5^{-senx}$ definida no intervalo $[0,2\pi]$. Qual é o valor de x que maximiza a função?

Resolução: $f(x) = 5^{-senx}$ é máximo quando – senx assume o valor máximo.

Como $x \in [0,2\pi]$, temos que ter $senx = -1 \rightarrow x = 3\frac{\pi}{2}$

Logo $f(3\frac{\pi}{2}) = 5^{-sen 3\frac{\pi}{2}} = 5^1 = 5$

Resposta: $x = 3\frac{\pi}{2}$

Os exercícios apresentados nesse trabalho forma resolvidos por mim e verificados pela orientadora.

A tabela abaixo permite-nos fazer uma melhor comparação quanto ao tipo de exercícios encontrados no "saber escola", abordagem de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. e Dante.

Tipos de Exercícios	**Quantidades de Exercícios segundo Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr**		**Quantidades de Exercícios segundo Dante**	
	Número de exercícios	**%**	**Número de exercícios**	**%**
I. Valor das funções, este subdividido em três aspectos.	-	-	-	-
I.1 . Sinal das funções	-	-	-	-
a) senx, cosx e tgx[10]	1	0,78%	23	10,80%
b) senθ, cosθ e tg θ[11]	-	-	4	1,87%
I.2.Quadrante do ângulo.	-	-	-	-
I.3. Determinar o valor.	-	-	-	-

[10] x radiano

[11] θ grau

a) senx, cosx e tgx	28	21,71%	57	26,76%
b) senθ, cosθ e tg θ	29	22,48%	31	14,55%
II . Verificar identidades trigonométricas	-	-	-	-
III. Determinar x tal que f(x) = K, K $\in$R e f(x) = senx, cosx ou tgx	-	-	11	5,16%
IV. Resolver equações trigonométricas.	-	-	-	-
V. Mostrar que: envolvendo polígono regular e circulo inscrito.	-	-	-	-
VI. Valor máximo e valor mínimo de uma função.	-	-	-	-
VII. Valores distintos de f(kx), com k inteiro e x dado f: seno, cosseno e tangente.	-	-	-	-
VIII. Verificar simetria de arcos (em relação ao eixo e em relação a origem).	-	-	-	-
IX. Determinar Imagens.	-	-	-	-
X . Dado f(x), calcular senx, cosx.	-	-	-	-
XI. Provar identidades através de condição dada.	-	-	-	-
XII. Determinar uma incógnita (m) do valor da imagem condicionada a existência de x tal que f(x) = a.	12	9,30%	16	7,51%
XIII. Determinar o período, a imagem e construir gráfico.	-	-	-	-
XIII.1 . f(x) = a senx com a Є R	3	2,33%	1	0,47%
XIII.2. f(x) = asenx $\lvert a \operatorname{sen} x \rvert$ com a Є R	-	-	1	0,47%
XIII.3.f(x) = a senbx com a e b Є R	3	2,33%	-	-
XIII.4. f(x) = c + a senbx com a, b e c Є R	3	2,33%	-	-
XIII.5. f(x) = c + a sem(x – d) com a, b e d Є R	3	2,33%	-	-
XIV. Determinar Imagem e o Período das	16	12,40%	20	9,39%

funções seno, cosseno, e tangente.				
XV. Construir gráfico envolvendo mais do que uma função.	-	-	-	-
XVI. – Provar desigualdades através de condições dadas	-	-	1	0,47%
XVII – Determinar o domínio das funções senx, cosx, tgx. a) senx, cosx e tgx. b) senθ, cosθ e tg θ	- 6 1	- 4,65% 0,78%	- 6 -	- 2,82% -
XVIII - Determinar o valor da expressão envolvendo a) senx, cosx e tgx. b) senθ, cosθ e tg θ	- 14 9	- 10,85% 6,98%	- 19 -	- 8,92% -
XIX – Dado o gráfico analisar a função.	1	0,78%	3	1,41%
XX - Determinar x tal que f(x) = K, K ∈R e f(x) = senx, cosx ou tgx	-	-	-	-
XXI – Conhecer definição das funções senx, cosx e tgx.	-	-	12	5,63%
XXII– Determinar o valor de x [0,2π] para condições dadas	-	-	3	1,41%
XXIII– Determinar senx, cosx e tgx através de condições dadas	-	-	1	0,47%
XXIV – Calcular arco seno, cosseno e tangente.	-	-	3	1,41%
XXV – Valor do ângulo que maximize ou minimize as funções sem, cosseno e tangente.	-	-	1	0,47%
Total	129	100,00%	213	100,00%

Identificamos tanto na abordagem de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr como na abordagem de Dante que ambos dão ênfase aos exercícios do tipo I 1. Determinar o valor da função. Essa classificação engloba os exercícios referentes a "redução ao primeiro quadrante", por exemplo: Calcular o valor de $tg\,5\frac{\pi}{6}$

Encontramos na abordagem de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr que $\frac{57}{129}$ exercícios enquadram-se no tipo I.1. Desses 57 (44.14%) exercícios, 28 (21.71%) são sobre radiano e 29 (22.48%) sobre graus, havendo um equilíbrio.

Já na abordagem de Dante, $\frac{88}{213}$ exercícios classificam-se nesse tipo de exercícios. Desses 88 exercícios temos que 57 (26,76%) são sobre radiano e 31 (14,55%) sobre graus. Observe que nessa classificação Dante da mais ênfase aos exercícios sobre radiano.

Percebemos que 9,32% dos exercícios (Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr) envolvem construção gráfica enquanto que na abordagem de Dante temos 0,94% dos exercícios.

Notemos que Dante tem uma diversidade maior de exercícios, apresenta 14 dos tipos de exercícios listados/ já Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr apresentam, em sua abordagem, 7 tipos dos exercícios listados.

Abordagem das funções trigonométricas, segundo depoimento de professores.

Para recolher informações sobre o trabalho que desenvolvem os professores em sala de aula, organizamos uma entrevista dirigida (AnexoII), isto é, elaboramos algumas questões as quais serviram de referência ao entrevistador, mas não foram tidas como questões fechadas. O entrevistador tinha liberdade de reelaborar e refazer a questão, se julgasse necessário, para favorecer ao entrevistado a compreensão e a possibilidade de resposta.

As questões formuladas foram as seguintes:

1. Quanto tempo leciona?
2. Quanto tempo leciona no Ensino Médio?
3. As funções trigonométricas senx, cosx e tgx são ensinadas em que série do ensino Médio?
4. Quando você ensina as funções senx, cosx e tgx? (que período do ano, depois de que conteúdo).

5. Como você ensina as funções senx, cosx e tgx? Poderia fazer um breve relato?
6. Como elas são ensinadas no triângulo retângulo?
7. Como você explica a marcação do ângulo sobre a circunferência de raio 1? (ângulo ou radiano, como marca os pontos A,B,C,....)

Análise das entrevistas

Dos quatro professores entrevistados três ensinam no Ensino Médio menos que 5 anos e um professor ensina há 10 anos.

A instituição classe do Ensino Médio, onde se ensina a função senx, cosx e tgx é:

- final da 1ª série e início da 2ª série (Prof º P)

- final da 1ª série (Prof º S)

- na 2ª série (Prof º J e JA)

Notemos que tem uma predominância de que as funções trigonométricas são ensinadas na 2ª série do Ensino Médio.

Também recuperamos nas entrevistas que, conforme Iezzi e os livros didáticos, na 8ª série, no triângulo retângulo, $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$ e $\text{tg}\theta$ são estudados a partir do conceito de razão trigonométrica. ("*Na 8ª série trabalho com o conceito de razão*" (Prof º JA)).

Quanto à abordagem do conceito de função trigonométrica no ensino médio, dois professores introduzem radiano por meio de regra de três "A *gente através de regra de três, sabe que 180º é igual a π então o ângulo 60º vai ser igual a x, né, então através de regra de três a gente calcula em radianos*" (20.P), enquanto um professor considera a circunferência de raio um (Prof º JA).

Segundo este professor a abordagem da medida em radiano é problemática no Ensino Médio e diz "*Radiano é o arco de comprimento exatamente como raio, né, e aí chamando a atenção do que significa isso e principalmente, isso não é muito trivial pra eles. Não é uma coisa muito tranqüila não. Você tem que explorar, chamar a atenção dos alunos, olha pessoal temos medida linear e medida angular o estamos fazendo conversões aqui, né, nós temos aquivalência angular e linear, né. Mas te confesso assim que isso não é uma coisa assim que trivial*" (42.JA). Os conceitos de medida angulares e lineares estão em jogo, fazem-se conversões o que considera o professor não trivial.

Este professor trabalha o conceito de radiano no caso da circunferência de raio um ou de outra medida.

Para marcar os pontos sobre a circunferência nenhum professor trabalha com a função E: $R \to S^1$. O professor (JA) declara trabalhar com "macete", por exemplo, "*quando você quer sei lá* $\frac{13\pi}{4}$ *né, como é que você vai marcar, como é que você vai descobrir na circunferência?*" (46.JA)

O "macete" dado é o seguinte "*Descubra qual é o maior número par possível que multiplicado por 4 dê mais próximo de 13π*"(46.JA). Notemos que o número par mais próximo de 13 é 12, então se conta com $12\frac{\pi}{4}$ e para $\frac{13\pi}{4}$ falta $\frac{\pi}{4}$. Assim teríamos o ponto $\frac{13\pi}{4}$.

Concluindo: confirmamos que o ensino de seno, cosseno e tangente na 8ª série, segundo os professores, são conforme os livros didáticos e o livro de Iezzi, via conceito de razões trigonométricas. No círculo trigonométrico a abordagem de função passa antes pela instrução da medida em radianos. Temos professores que trabalham diretamente com a regra de três e outros que exploram a conversão da medida em graus para a medida em radianos.

Conclusão

O estudo que realizamos nos permitiu de maneira mais geral concluir que:

- Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais que o estudo da trigonometria deve-se ater às funções seno, cosseno e tangente dando ênfase ao estudo de 1ª volta no ciclo trigonométrico.

- Tanto nos PCNs quanto PCSC as funções trigonométricas são objeto de estudo na 1ª e 2ª série do Ensino Médio.

- No saber a ensinar, saber noosferiano, foram estudados dois livros, nesses livros encontramos duas abordagens para o estudo de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Uma abordagem (Iezzi), aborda seno, cosseno e tangente como razão trigonométrica/ na outra abordagem, (Wagner e outros) como função trigonométrica.

- Quanto aos exercícios estudados constatamos a ausência de gráfico na abordagem de Wagner, Morgado e Carmo. Enquanto que, no livro de Iezzi, dos 48 exercícios estudados 34, são sobre construção gráfica. Temos ainda uma proporção grande de exercícios no nível da noosfera, que dá grande importância ao uso de gráficos ($\frac{34}{48}$ exercícios).

- No saber ensinado os dois livros didáticos estudados diferem na abordagem dos exercícios propostos. Temos que Dante traz uma diversidade maior de exercícios: 14 tipos de exercícios; e Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr, 7 tipos de exercícios. Também Dante dá mais ênfase aos exercícios que envolvem o uso do radianos ($\frac{116}{213}$), enquanto Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr propõem menos ($\frac{49}{129}$).

- Quanto à abordagem das funções trigonométricas, segundos depoimentos de professores, têm-se que no triângulo retângulo ela é conforme a proposição de Iezzi. E que a abordagem da medida de ângulos em radiano é problemática. Cabe aqui uma proposição de uma seqüência didática e aplicações em classe para entender as desigualdades dos alunos. Mesmo com as entrevistas sendo realizadas somente com 4 professores, temos uma amostra sobre a realidade do ensino e declaração que professores trabalham com medidas de ângulo e radiano usando da regra de três. Mas também tem professores que buscam alternativas e exploram materiais didáticos.

Uma confirmação: as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são objetos de ensino no Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

- Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – 2002.
- Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC).
- BOYER, C.B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: editora da Universidade de São Paulo 1974.
- EVES, Howard, *Introdução a História da Matemática*. Editora Unicamp; São Paulo, 1995 p 202-204.
- CARMO, Manfredo Perdigão do., MORGADO, Augusto César., WAGNER Eduardo. *Trigonometria Números Complexos. SBM 2001*, pp 5-42, 101-108.
- IEZZI, Gelson. *Trigonometria*: Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 3. 7ª edição. Atual 1993. p 86-109
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexto & Aplicações.*São Paulo: Editora Ática. 2000. p 67-90
- GIOVANNI José Ruy.,BONJORNO José Robert.,GIOVANNI Jrjosé Ruy.*Matemática Fundamental*.Volume único, 2º grau. FTD. 1994. p 338-361
- DÓRIA Celso., Batista ELIEZER., CARVALHO Neri T. Both. *Tópicos Especiais em Matemática II.* Geometria e Trigonometria. Editora da Universidade Federal de santa Catarina.
- CHEVALLARD,Y. *La transposition Didactiques du savoir savant ou savoir anseingé.* Èditions La pensée souvage: Grenoble, 1992
- CHEVALLARD,Y. (1992), L' analyse des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12 (1), éditions La pensée sauvage, Grenoble.

Anexos

Anexo II

Protocolo das Entrevistas Realizadas com Professores da Rede Pública

Entrevista com o prof º J A

1. F – José Análio há quanto tempo você leciona?
2. J A–23 anos.
3. F – E quanto tempo leciona no ensino médio?
4. J A– Ensino médio, uns 10 anos.
5. F – As funções trigonométricas senx, cosx e tgx são ensinadas em que série do ensino médio?

6. JA – Bom elas são na verdade ensinadas na 8ª série, né, na 8ª série você começa com as razões trigonométricas.

7. F – Aham
8. JA–O ideal é você mostrar para o aluno como é que os matemáticos chegaram a isso, né, acho que, penso que é importante para eles você mostrar a questão histórica, né, desde quando os gregos determinaram o raio da Terra com 10% de erro. Uma atividade, por exemplo, que é interessante na na 8ª série é você pede pra eles trazerem régua, trazerem lápis, um transferidor aí você pede pra que eles tracem, digamos, um triângulo com ângulo agudo de 30° ou 60° ou 45 né que são os triviais inicialmente e aí eles traçam e você pede pra traçarem, por exemplo, uma seqüência de triângulos né a partir desse ângulo de 30° e pede pra que eles determinem algumas razões como do tipo: vários dos catetos opostos pelas respectivas hipotenusas né ou vários dos catetos adjacentes pelas respectivas hipotenusas daqueles triângulos né ai eles se surpreendem:

– Ah! Mas da sempre o mesmo valor, da uma constante

Então aí você traz um pouquinho da questão histórica e relaciona o que que são essas razões né o seno o cosseno a tangente né. Isso a nível de 8ª série, uma outra coisa que é interessante né, bom aí eles vão estudar seno cosseno e tangente, leis de seno e leis de cossenos e aplicações disto né, lógico que no triângulo retângulo. Aí na 2ª série do ensino médio é que eles, num primeiro momento. A você tem que sentir a turma né, por exemplo, ano passado eu já comecei relacionando o triângulo retângulo né, no ciclo trigonométrica, na circunferência trigonométrica e foi tranqüilo. Já nesse ano eles não lembravam de algumas coisas da 8ª série, então a gente teve que retornar a fazer uma rápida recordação né da trigonometria pra aí sim começa o estudo da trigonometria propriamente dita. Aí no segundo, na oitava série eu faço a construção deles é com eles dos teodolitos né, aí mostro também pra eles o astrológo né, como é que eles faziam pra questão das navegações né.

9. F – Hunhun

10. JA - Se você deixar ele paradinho né. Você tem aqui a linha do horizonte, aí você quer determinar a altura de uma montanha por relação de triângulo você sabe que esse ângulo e esse têm a mesma medida né o quanto variou aqui. Isto serve tanto pra altura né como pra, bom aqui você tem só pra altura né, e aí com o teodolito eles determinam tanto a altura (silêncio enquanto o professor pegava o teodolito), aqui então você tem a determinação da altura né você que a altura de uma montanha né. Certo aí tem a mira. Então aí você constrói na 8ª série né e aqui a determinação também, aqui seria na horizontal, pra medidas inacessíveis né pra determinar distâncias a pontos inacessíveis, por exemplo, você tem um rio, ta do lado de cá da margem você quer determinar a largura do rio né.

11. F – Hunhun

12. JA - Você olha aqui marca um ponto de referência do outro lado do rio, se desloca uma medida conhecida, sei lá, 10 metros se você colocar o teodolito na mesma posição você não vai observar o teu ponto de referência, pra isso o que que você vai ter que fazer? Você vai ter que girar o teodolito.

13. F – O que vai dar o ângulo

14. JA – È ele te da o ângulo de lá. Esse do teodolito eu sempre brinco, nós fizemos uma atividade uma vez em União da Vitória, Porto União com um grupo de professores né e nós acabamos nos divertindo muito porque um grupo de professores foi o único que deu resultado muito longe da distância real do rio né de uma margem a outra e o motivo do riso foi por que eles escolheram um pescador né que tava do outro lado do rio. Lógico o cara mudou de posição (riso) eles tinham que ter escolhido um ponto da árvore, uma pedra né.

15. F – Um ponto de referência fixo.

16. JA – Um ponto de referência fixo né e não móvel ai sim. Mas pô a gente revisou os cálculos, de outros grupos também né – Pô mas porque que não deu será que há algum erro no teodolito , o que vocês escolheram? (riso)

– Não, nós escolhemos o pescador que tava do outro lado.

E ai também na 2ª série né, ta então isso a nível de 8ª série né. Na 8ª usamos isso, o que a gente chama de golhômetro (o profº mostra o golhômetro). A professora de física, a professora Terezinha, da 1ª série também. È eu não sei se ela continua construindo com eles né mas eu faço a construção com eles de um do teodolito né do teodolito do golhometro. Na 8ª série eu só mostro pra eles né. Já na 2ª série do ensino médio não ai eles calculam né. Então por exemplo, se você quer determinar do que consiste né um círculo de raio se não me engano a 10cm né são 10 cm você tem aqui.

17. F – Hunhun

18. JA – Aí você cola um círculo de papel milimetrado. Então se você quer determinar o seno de 30° você tem como o raio é 1 né 1 seria os 10 cm né então você tem 0,5, Aí é aqui como é papel milimetrado você tem aproximação de até duas casas depois da virgula né, então ele te da uma aproximação muito boa né, por exemplo, aqui do ....

19. F – do 45

20. J A– do 45 né você teria cinco, seis, sete 0,71

21. F – Hunhun

22. JÁ - Né e aí você passa a mostrar pra eles, né, que da significado pra tabela, quer dizer como é que eles construíram uma tabela né de que forma foi. A gente pode construir um outro instrumento que a gente chama de golhômetro né pra também determinar medidas desses é os ângulos né seno e cosseno, aí eu chamo a atenção deles se a gente colasse também aqui nessa extremidade né uma réguinha de papel milimetrado e nós tivéssemos esse raio flexível prolongasse nós teríamos também a medida da tangente.

23. F – Da tangente.

24. J A– Né e é bastante interessante também pra você fazer a associação depois dos sinais. Ó zero ta aqui, agora nós estamos medindo cosseno de 120° quanto que vale?

- “Há 0,5”.

Ta mas só que agora medindo no sentindo negativo né.

25. F – Hunhun.

26.J A– E aí você fala dos quadrantes 1°, 2° e 3°. Tem uma outra régua trigonométrica que eu utilizo com eles e que deixei lá na sala, depois se quiseres dar uma olhada.

27. F – Hunhun

28 . J A - Não se isso te interessa ou não.

29. F – Não eu posso ir, posso ir dar uma olhada.

30. JA– Né então os primeiros passos na 2ª série é essa recordação da 8ª série, a construção do golhômetro né, ai eu peço pra eles calcularem seno cosseno e tangente de vários ângulos não apenas dos arcos notáveis né mas de outros né porque ai eles tem instrumentos.

31. F – Tem conhecimento

32 . JA– Isso nas primeiras provas né eles podem utilizar o instrumento né.

33. F – Hunhum

34. JA– É esse instrumento é esse golhometro, né tem uma ....

35. F – E é eles que fazem, eles que constroem.

36. JÁ – Sim é eles que constroem, eu forneço a matriz né por que o problema que tu tens aqui é essa matriz ela foi feita pelo CFM acho que uns 10 anos atrás por ai, por que se você bate um xerox, no xerox a lente você tem variações né pelo xerox e ela sendo impressa não você não tem as variações. Então lógico pra você fazer atividades desse tipo você tem que ter um coeficiente de erro aí né. Lógico que tem aquele aluno é aquilo que eu chamo a atenção deles uma coisa que que não é muito normal, muito comum dos nossos alunos é efetuar mediadas né então muitas vezes o aluno acaba é faz mediadas de qualquer jeito, não vai pegar uma casa depois da virgula, então também uma forma de evita-los é chamar a atenção: "ta mas quanto que mediu ali"? né então você sabe que pra efeito de correção né de uma atividade que tem peso você tem que considerar um considerou 0,71 o outro 0,72 e o outro 0,70 né. E ai tem outros fatores né com habilidade pra medir ou sei lá derepente o cara tem problema visual ou algo assim não sabia então você tem que leva em conta essa idéia. E a alguns anos atrás, não consigo te precisa agora eu construí com a 8ª também o golhometro né por que daí eles poderiam utilizar na 1ª série em física na decomposição de forças e depois já teriam ele pra 2ª série né. È esse ano que passou eu construí com eles a professora de física também. A idéia seria construir que servisse na 8ª em física na 1ª série e em trigonometria na 2ª série também. Mas o fato que é curioso aqui é que eu tive um aluno na 8ª né e que ele tirava sempre excelentes notas né, na parte de trigonometria nas aplicações da trigonometria, e, no entanto ele não utilizava aparentemente na prova os cálculos normais, triviais que todos faziam. Ele fazia questão com várias contas né, mas não propriamente aqueles: seno cateto oposto sobre cateto adjacente palalalala....

Aí ele acertava as questões a partir dos cálculos. Nós sentamos e fomos conversar né. Como é que você faz? E ai é interessantíssimo, né então digamos que eu te dou é te digo que você esta a distância de 30 m de um prédio e esta observando o prédio sobe um ângulo de 30° qual é a altura do prédio? O que que ele fazia. 30 m ele dividia isso de tal forma que desse no raio do golhometro dele,ou seja ele usava a idéia de escala. Ele reduzia isso daqui marcava os 30 m aqui coloca ao ponteirinho no 30° subia perpendicular.

37. F – E achava o valor.

38. JÁ – Tinha a altura, multiplicava pela escala que ele utilizou tinha a medida real. E assim ele deu essa sacada pra tudo né na parte de trigonometria. Então você vê assim que foi aquele aluno que realmente se apropriou né tinha a idéia sabia o que que era o seno quando usa seno, quando usa cosseno e sabia transferi esse conhecimento pra uma outra situação qualquer né ....e indeterminado. Então aí na 2ª , por um tempo eles constroem ai você chama a atenção né o golhometro é meio que facilita no sentido de que pra questão de redução ao primeiro quadrante né.

39. F – Humhum

40. JÁ – Chamando a atenção a eles que você tem sempre um representante no segundo quadrante, quer dizer você tem que cuidar o sinal né que tenha a media equivalente ao primeiro quando você faz essa redução isso te facilita bastante eles visualizam eles passam, me parece, a entender melhor né . Acho que já falei de mais pra pergunta especial talvez respondi mais alguma.

41. F – (Riso) Já respondeu bastante. È e como você introduz a medida do ângulo em radiano?

42. JA – (silêncio) A ta, é isso é uma das coisas que eu chamo a atenção deles né algumas atividades do tipo que eu peço pra eles fazerem: se uma circunferência tem raio 5 cm né, marco um ângulo de 30° e ai se ela tiver 10 cm qual vai ser o comprimento desse arco de 30° né pra que eles façam essa associações né quando você tem ...... na primeira circunferência, 2π.R (raio) pra associa o que vem a ser o radiano né. Radiano o arco né de comprimento o que exatamente como raio né e ai chamando a atenção do que que significa isso e principalmente isso é uma coisa que não é muito trivial pra eles ta, não é uma coisa muito tranqüila não. Você tem que explorar, chamar a atenção né, é ta e se o raio da circunferência é outro? E essa questão do comprimento do arco? né. Puxa agora veio uma coisa e escapou agora veio de novo né é chamando a atenção pra eles, olha pessoal temos medida linear e medida angular, estamos fazendo conversões aqui né

nos temos aquivalência angular e linear né. Mas te confesso assim que é isso não é uma coisa assim que trivial, a o cara olhou a não ta já entendi de vez em quando eles dão aquela paradinha:

- Mas como assim?

Há lembra eles que você tem a situação linear, por exemplo, quando você fizer exercício de comprimento de arco né a eles sentem um pouco a dificuldade né na questão de comprimento de arco.

43. F – Como você explica a marcação dos pontos sobre a circunferência de raio 1? Como você marca o ângulo, o radiano na circunferência de raio um?

44. JA – (silêncio) Arcos em graus e em radianos também?

45. F – É em radianos também.

46. JA– Bom o que que eu faço com eles ta, eu procuro com eles tanto chamar a atenção principalmente assim ó: quando eu trabalhos com eles a questão da primeira determinação né, são os assuntos iniciais aí, claro você trabalha toda aquela parte de convenção de grau pra radiano de radianos pra graus e tal depois quando você vai discutir a primeira determinação positiva negativa né a até eu brinco com eles "ó um macete" né quando você quer sei lá $\frac{13\pi}{4}$ né, como é que você vai marcar, como é que você vai descobrir na circunferência. Descubra qual é a maior par possível que multiplicado por 4 de mais próximo de $\frac{13\pi}{4}$ (Nota do Entrevistador: Leia-se qual o número que multiplicado por 4 de o maior número par possível menor que 13).

- Há professor

Ta você até pode utilizar o macete, mas tem que saber porque que usa né por que que agente deve colocar o maior par ali possível. Porque veja a volta não é 2π, então conforme o número de voltas você vai tendo sempre números pares 4π, 6π. Ta legal por que que é o maior par possível, se você tiver 6π significa o que que você deu 3 voltas e parou aonde né, então ai tanto eu faço a marcação em graus como eu faço com eles a marcação em radianos né. O que que seria o π a onde que estaria o $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{6}$ né olha aqui pessoal o 0 a π, nós conseguimos de 0 a π 6 pares ó $\frac{\pi}{6}$, $2\frac{\pi}{6}$, $3\frac{\pi}{6}$...$6\frac{\pi}{6}$, né e isso se tu fazes um trabalho dessa forma inicialmente isso te facilita muito a questão da redução ao primeiro quadrante tranqüilamente, isso te abre o caminho né principalmente pra aquele aluno que "saco", que faz né. Por que eu to falando aqui pra ti assim eu to falando de forma geral né mas é que nem eu disse tu pega um aluno de Piaget né que é o sujeito espírito dele é o cara o que: perfeito né que tinha cérebro perfeito e o principal estava afim de aprender né, então pegando aquele aluno que critica que faz que executa que faz as atividades no golhometro que constroem que faz uma visão legal. Já pra aquele que leva né, na festa assim de vez em quando fala "tá professor mas agora $\frac{\pi}{6}$, aonde que fica" (acabou a fita perdi algumas coisa).

Isso facilita pra eles visualiza. Isso facilita na redução ao primeiro quadrante e principalmente lá nas equações trigonométricas né, até pra eles determinar a questão da solução geral quantas soluções você tem né em que quadrante esta e quem seria né, certo isto facilita muito a vida.

47. F – E no triângulo retângulo você trabalha já com o conceito de função?

48. JA – Silêncio

49. F – É quando você começa a trabalhar com o conceito de função com eles?

50. JA– Ah tá quando tu falas ali de $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$.

51. F – Não, quando você introduz o conceito de função pra eles, de função trigonométrica, no triangulo retângulo você trabalha com razão né como o senhor falou.

52. JA– Isso lá na 8ª série como razão, na 2ª série inclusive assim ó trigonometria estava no final do programa da 2ª série, nos conversamos e passamos pro início por que toda a 1ª série nos discutimos funções certo. Então ai você da continuidade logo no início da 2ª série ò vamos continuar discutindo as funções né, o que que vem a ser a função senx né o x ai você vai discutir o domínio, você vai discutir com eles a imagem o gráfico né ai

53. F – O período.

54. JA– O período, aí eu chamo a atenção deles da idéia da função né que a função com eles. Acho muita graça, né, porque eu brinco ò então a gente tem a função mãe f (x) = senx né, vamos traçar o gráfico? Né como é que seria o gráfico? Quem seria o meu domínio? X pode assumir o que significa o domínio né

- *a por particularidade da função, aonde ela existe e tal* .

Então será que o x pode ter qualquer valor, ó vocês viram lá se eu quisesse calcular 1050 sen1050 é possível? De –3000 é possível? Né

- Ah, então são todos os reais.

Né e os valores dessa função claro associando ao nosso golhometro ao que nós fizemos a circunferência trigonométrica de quanto a quanto varia os valores do nosso seno né e de 0° quanto que é?

- A era zero.

Certo e de 30°?

- *a era 0,5*

E 90, $\frac{\pi}{2}$?

- *1*

E assim quer dizer é legal por que você utilizando esses diversos registros né que o Dirval chama de registro de representação semi-ótica fica legal para o aluno essa idéia de passa do golhometro pro gráfico né, ele visualiza, ele lembra porque que é isso né. Aí você mostra a e agora oque que vai acontecer se eu passa do 360 se eu tiver 390° quanto que ela vai vale né ou $2\pi + \frac{\pi}{6}$ né, quanto que vai ser ? né. Voltar a repetir entãoa gente tem aqui o período, o que que significa o período né, e daí eu chamo a atenção deles pra representação do tipo né e no gráfico então quem seria a minha imagem, o período já falamos sobre isso. Aí eu vou chamar a atenção deles pra variações que você pode fazer acontecer nessa função né. Então quando você tem, f(x) = senx ai eu coloco pra eles assim "ó nós vamos estudar nossa função seno a partir de agora da seguinte forma: a + b sencx + b né, estou colocando parâmetros, vamos ver o que acontece com a função mãe se eu colocar esse parâmetros. Então se eu tiver a + senx, esse meu a é 2, o que que esta acontecendo né, eu estou deslocando essa minha função senx ao longo do eixo y, o que que vai mudar, oque vai variar?

- A varia a imagem né, era de -1 a 1 agora como soma 2 vai de 1 a 3.

A legal, então o que que faz, ela faz uma translação né. E essa função subiu ou desceu aí eu chamo a atenção deles e se eu fizer 2.senx, né. Aí eu brinco com eles "ba como é que vai ser a imagem? Olha aqui você esta multiplicando duas vezes o valor da função senx, quem é a imagem do senx? A ela vai de –1 a 1 se você esta multiplicando por 2 isso vai de quanto a quanto? "

- A de –2 a 2

Então o que que você fez, você faz uma ampliação ou uma contração dessa tua função. Agora e se eu mexer la no seno, no x, se eu estiver sencx + d , vamos primeiro mexer com senx + $\frac{\pi}{2}$ o que que a gente fez, vamos construir o gráfico? Então o que que aconteceu, a gente fez uma translação no eixo x, em vez dela começar em zero a gente teria o que a gente translado ela do zero pra $\frac{\pi}{2}$. Lógico ela também vai ter um valor no zero que a gente sabe por questão de domínio, o que que aconteceu com essa função? E se eu faço, eu mexo no cx né sen3x olha o que que vai acontecer com meu período, qual é o período da minha função 2π né , esse 2π ela leva o que, 2π para mostrar todo o seu comportamento né toda a sua cara e agora $2\frac{\pi}{3}$, o que aconteceu com ela né você teve uma contração nessa função e se em vez de eu multiplicar né, na verdade o que que eu fiz eu acelerei ela, e se eu tivesse $\frac{x}{3}$ seria muito mais suave né, seria o que 6π né o período dela né.

Então isso mais ou menos eu discuto com eles assim pro seno pro cosseno né que são mais significativos. Da tangente também eu chamo a atenção do que que acontece mas das outras funções não, das outras funções eu só mostro o gráfico trivial que dizer cossecante a secante e a cotangente é basicamente o que eu digo pra eles se vocês souberem bem seno e cosseno vocês sabem a tangente né quer dizer precisa algumas coisinhas a mais pra sabe tudo da tangente, mas são fundamentais pra vocês é o seno e o cosseno né então depois você tem secante o inverso do cosseno e tal.