

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Sandro da Silva Livramento Machado

**VARIÁVEIS DISCRETAS E FINITAS EM MECÂNICA QUÂNTICA
E SEUS DIFERENTES LIMITES PARA O CONTÍNUO**

Florianópolis (SC)

2004

Sandro da Silva Livramento Machado

**VARIÁVEIS DISCRETAS E FINITAS EM MECÂNICA QUÂNTICA
E SEUS DIFERENTES LIMITES PARA O CONTÍNUO**

Dissertação submetido ao Programa de Pós-
graduação em Física para a obtenção do
Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Maurizio Ruzzi

Florianópolis (SC)

2004

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

M149v Machado, Sandro da Silva Livramento
Variáveis discretas e finitas em mecânica quântica e seus
diferentes limites para o contínuo [dissertação] / Sandro da
Silva Livramento Machado ; orientador, Maurizio Ruzzi. -
Florianópolis, SC, 2004.
48 p.: il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa
de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Mecânica quântica. 3. Teoria dos grupos.
4. Automorfismo. I. Ruzzi, Maurizio. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

CDU 53

RESUMO

O objetivo principal desta dissertação é apresentar uma rápida discussão sobre alguns aspectos conceituais da Mecânica Quântica. Em particular trataremos da diferença entre as abordagens voltadas a graus de liberdade com análogo clássico (ditos 'contínuos') ou sem análogo clássico (ditos 'discretos'). Mostraremos de maneira objetiva que é possível obter uma formulação que contemple ambos os casos, sem perder informações que julgamos relevantes dentro do contexto mecânico quântico. Neste sentido, nos valeremos do formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica, utilizando-se da abordagem de Schwinger para casos discretos, e construiremos sua conexão com os casos contínuos.

ABSTRACT

This theses main purpose is to concisely discuss some conceptual features of non relativistic Quantum Mechanics. More specifically, we focus on the differences between the approaches dealing with degrees of freedom with and without classical counterpart. We show that it is possible to deal with both cases without loosing sight of the peculiarities of each case. In this sense, through the use of the Dirac formalism of Quantum Mechanics, we focus on Schwinger's approach to degrees of freedom without classical counterpart, constructing it's connection with those ones possessing a classical counterpart.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 1$	30
Figura 2	Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 0.5$	31
Figura 3	Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 0.2$	32
Figura 4	Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 1.8$	33

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: IDÉIAS GERAIS	7
2 O FORMALISMO DE DIRAC PARA A MECÂNICA QUÂNTICA	10
3 OS OPERADORES DE SCHWINGER	14
4 LIMITE DO CONTÍNUO	21
4.1 VETORES IMPRÓPRIOS	25
4.2 O PAR CANÔNICO ÂNGULO E MOMENTO ANGULAR	33
4.3 COMUTADOR	36
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
APÊNDICE A – Congruências	44
Referências Bibliográficas	47

1 INTRODUÇÃO: IDÉIAS GERAIS

É desnecessário frizar a importância que a mecânica quântica possui dentro da física de nossos dias. Além de estar presente, em maior ou menor grau, em praticamente todas as áreas de pesquisa atuais em física teórica, o final do século XX viu a retomada de fôlego de uma área tão interessante como a ótica quântica e basicamente o surgimento da área de informação e computação quântica, sobre a qual tem crescido o interesse ininterruptamente. Mesmo sendo considerada uma teoria completa do ponto de vista fenomenológico, a mecânica quântica guarda algumas questões que ainda alimentam discussões sobre seus fundamentos, tanto de caráter conceitual filosófico quanto de caráter físico, como exemplo deste último caso citamos as discussões referentes ao que ocorre durante o processo de medida.

A mecânica quântica é dotada de várias representações, que evidentemente, guardam seus aspectos e interpretações particulares. Representações como a da Mecânica matricial e Mecânica ondulatória são perfeitamente equivalentes (mesmo isso pode ser colocado em dúvida, vide referência França), sendo que estas equivalência estendem as diferentes interpretações que podem ser dadas a ambas representações. No formalismo da mecânica ondulatória, por exemplo, as grandezas físicas são representadas por operadores lineares que atuam em uma determinada função de onda (Ψ), transformando esta função em outra função (Φ) do mesmo espaço vetorial. Os argumentos destas funções, em geral, são números reais, e essas funções relacionam o corpo dos reais ao corpo dos complexos. No caso da formulação matricial, levamos em conta os elementos de matriz, que podem ser infinitos e assumem valores discretos.

Uma outra representação (relevante), que apresenta uma interpretação peculiar dentro da Mecânica Quântica, é a de integrais de trajetória de Feynman. Nesta abordagem, a trajetória clássica que minimiza o funcional de ação é substituída por uma integração em todas as trajetórias possíveis no espaço de configurações $x(t)$.

As formulações acima são encontradas com enorme frequência na descrição de graus de liberdades com análogo clássico. Entendemos por graus de liberdade com análogo clássico aqueles que podem ser usados na descrição de sistemas quânticos com análogo clássico, como aqueles onde estão presentes os operadores usuais de momento linear e posição, e momento angular e ângulo. Em geral, os operadores convenientes presentes em tais descrições possuem espectro contínuo. Por exemplo, a descrição quântica usual de uma partícula em um dimensão, associada a hamiltonianos de oscilador harmônico, poço de potencial, etc.

Existem porém, o que chamaremos de graus de liberdade sem análogo clássico, como por exemplo aqueles associados a observáveis como spin e isospin, que assumem apenas um conjunto finito de valores. Dirac (1958) abordou a mecânica quântica através de uma representação onde foi possível resgatar uma ou outra abordagem levando-se em conta seus graus de liberdade, fossem eles contínuos, ou discretos. Esta formulação revela-se extremamente conveniente dentro da discussão proposta nesta dissertação. Dentro da linguagem proposta por Dirac, Schwinger (1970) constrói uma abordagem algébrica para a descrição de graus de liberdade que tem a virtude de poderem ser usados em sistemas sem análogo clássico, evidenciando as peculiaridades deste contexto (discreto e finito).

Tendo em vista os vários aspectos acima mencionados, esta dissertação tem como principal objetivo desenvolver uma discussão sobre a abordagem de Schwinger dentro da Mecânica Quântica. Não abordamos aspectos filosóficos da teoria, apenas os aspectos do formalismo utilizado, com alguma ênfase nas conseqüências da adoção de certos conceitos matemáticos. Neste sentido, nosso trabalho discute um aspecto relevante dentro da teoria da Mecânica Quântica: a descrição dos graus de liberdade sem análogo clássico. Esta descrição, como veremos, pode ser posta em analogia com as descrições dos graus de liberdade com análogo clássico. Aqui a extensão desta analogia será discutida em detalhe. Para tanto, construiremos uma relação entre o par de operadores unitários de Schwinger, com os pares canônicos que possuem análogo clássico. A introdução de novos operadores, construídos a partir dos de Schwinger, de coordenada e momento, com espectro finito e discreto, permitirá construir a analogia entre as descrições do caso discreto e dos casos contínuos. O intuito será, como dito, de identificar a extensão desta analogia e, desta forma, explicitar as peculiaridades dos dois contextos.

No Capítulo 2, será revisada a linguagem de Dirac para a Mecânica Quântica. Destacamos o fato da linguagem de Dirac ter um forte apelo conceitual. O objetivo principal desse capítulo, portanto, será permitir que as conseqüências destes conceitos sejam explicitadas e exploradas ao longo do texto. Além disso, a facilidade de operação e o alto grau de síntese dos resultados oferecem ao leitor uma compreensão mais clara dos passos seguidos. Apresentamos algumas das propriedades e postulados mais importantes dentro do contexto desta dissertação.

O capítulo subsequente apresenta a abordagem de Schwinger para graus de liberdade sem análogo clássico. Esta abordagem é a base para a construção de um processo de limite que irá relacionar os casos discreto e contínuo, e conseqüentemente para construção da relação entre os pares canônicos. Este processo de limite oferecerá subsídios para estudar que há de

análogo entre as descrições dos graus de liberdades com análogo clássico e os graus de liberdades sem análogo clássico.

Para isso define-se um par de operadores, conhecidos como os operadores unitários de Schwinger, que atuam de maneira cíclica dentro de um dado conjunto de estados (SCHWINGER, 1960). Nesta formulação será conveniente a introdução da notação de congruência módulo N , sendo que sua conveniência é uma particularidade do caso discreto, e que será apresentada com maior detalhe em um apêndice.

O Capítulo 4 é o que carrega mais considerações onde, basicamente, construiremos e faremos a discussão do processo de limite. Porém, outros conceitos que foram apresentados no capítulo dois, como por exemplo *rays*, serão contextualizados. A abordagem de Schwinger, discutida no capítulo anterior, estará agora relacionada com os pares canônicos posição e momento linear, ângulo e momento angular.

A abordagem acima descrita permite explorar o problema da normalização dos vetores impróprios, e a necessidade do uso destes nas formulações usuais de Mecânica Quântica. Vetores impróprios são ingredientes importantíssimos dentro de todas as formulações da Mecânica Quântica. Um dos pontos a serem ressaltados nesta discussão reside no fato da normalização estar relacionada com o papel da probabilidade dentro da teoria (e, portanto, com as medidas de grandezas físicas). Portanto, como vetores impróprios não possuem uma norma finita bem definida, é necessário que a referida relação entre probabilidade e normalização seja reestabelecida. Partindo da abordagem de Schwinger, o processo de construção do limite explicita o quão indispensável é o aparecimento de vetores impróprios na teoria, e, desta forma, o quanto é necessário o reestabelecimento da relação entre normalização e probabilidade.

O objetivo desta dissertação, portanto, pode ser visto como a tentativa de explorar as peculiaridades das descrições dos diferentes tipos de graus de liberdades dentro da Mecânica Quântica.

2 O FORMALISMO DE DIRAC PARA A MECÂNICA QUÂNTICA

Faremos neste capítulo uma breve revisão de alguns princípios e postulados da mecânica quântica a fim, também, de fixar a nossa notação para os próximos capítulos. Apresentamos nesta revisão alguns aspectos da notação da mecânica quântica dando ênfase às questões ligadas ao tema desta dissertação. Conceitos como *rays*, operadores, espectros de autovalores, serão o norte deste capítulo (SAKURAI, 1994; SHANKAR, 1994; LEITE LOPES, 1992).

Vamos explorar a notação de Dirac. O estado de um sistema físico é representado pelo ket $|A; a\rangle$. Aqui a , em princípio, é um valor numérico real associado à grandeza física A , e o *ket* é então a representação do estado de um sistema físico. Como consequência o conjunto de valores de a representa o conjunto de todos os valores possíveis associados as medidas da quantidade física do sistema A .

Os *kets* podem ser somados e multiplicados por uma constante complexa arbitrária.

$$|A; a\rangle + |B; b\rangle = |D; d\rangle, \quad (2.1)$$

$$c(|A; a\rangle) = c|A; a\rangle. \quad (2.2)$$

Dizemos que os kets representam uma classe de vetores, denominados *rays* (raios, ou direções, seriam a tradução literal, porém, por não terem uso corrente manteremos o termo em inglês), por conseguinte verificamos as propriedades algébricas desta classe de vetores. Um *ray* é uma classe algébrica de equivalência de vetores quanto ao módulo. Uma vez que kets representam estados físicos, multiplicar um dado vetor por uma constante não mudará seu significado físico. Ainda,

$$\begin{aligned} c(|A; a\rangle + |B; b\rangle) &= c|A; a\rangle + c|B; b\rangle \\ (c_1 + c_2)(|A; a\rangle) &= c_1|A; a\rangle + c_2|A; a\rangle. \end{aligned}$$

As constantes c , c_1 e c_2 podem assumir valores complexos.

Sabemos que, em geral, para cada espaço vetorial podemos associar um espaço dual de forma bi-unívoca. O elemento correspondente ao ket que

forma o par da representação é o bra $\langle A; a |$. Assim, se o espaço vetorial tem dimensão finita, o espaço dual também tem dimensão finita. Sendo então,

$$|A; a\rangle \equiv \langle A; a|. \quad (2.3)$$

As propriedades verificadas acima valem, pela correspondência bi-unívoca, para o espaço dual. Ainda,

$$c_1 |A; a\rangle + c_2 |B; b\rangle \equiv \langle A; a | c_1^* + \langle B; b | c_2^*, \quad (2.4)$$

então a soma de dois kets tem correspondente no espaço dual como sendo a soma de dois bras associado aos kets, porém com constantes c_1^* , c_2^* complexas conjugadas de c_1 e c_2 , respectivamente.

Um operador agindo em um ket ($|A; a\rangle$) transforma-o em outro ket ($|B; b\rangle$),

$$\hat{X}|A; a\rangle = |B; b\rangle, \quad (2.5)$$

sendo que o operador que fizer uma operação análoga no espaço dos bras será o conjugado hermitiano do operador \hat{X} ,

$$\langle a; A | \hat{X}^\dagger = \langle b; B|. \quad (2.6)$$

Em particular, quando

$$\hat{A}|A; a\rangle = a|A; a\rangle, \quad (2.7)$$

ou seja, um operador age em um ket não nulo resultando neste mesmo ket multiplicado por uma constante numérica a , dizemos que $|A; a\rangle$ é um auto-ket de \hat{A} com autovalor a . Relaciona-se portanto, o operador \hat{A} à quantidade física A . Desta forma não é mais necessário usarmos aqui a notação $\hat{}$ para operadores, assim como fica estabelecida a notação abreviada

$$|A; a\rangle \equiv |a\rangle.$$

Como kets são rays, uma vez que

$$A|a\rangle = a|a\rangle, \quad (2.8)$$

é imediato que

$$A(\alpha|a\rangle) = a(\alpha|a\rangle).$$

Os autovalores associados ao operador formam o espectro desse operador reproduzindo os valores possíveis de medidas de grandezas físicas. O espectro pode ser discreto (um conjunto enumerável) ou contínuo (um

conjunto não-enumerável, como por exemplo os números reais entre dois números inteiros).

Um operador é dito hermitiano se

$$\hat{X} = \hat{X}^\dagger, \quad (2.9)$$

e de fato, observáveis físicos sempre são representados por operadores hermitianos.

Disso decorre,

i) todos os autovalores são reais;

ii) todo bra conjugado a um autoket de um operador hermitiano é um autobra relativo ao mesmo autovalor. Desta forma, dado um ket $|B; b\rangle$, não necessariamente B representará uma quantidade física. Isto será fato apenas quando B for hermitiano.

O produto interno entre ket e bra é da forma:

$$(\langle a | \cdot (|b\rangle)) = \langle a|b\rangle. \quad (2.10)$$

Com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \langle a|b\rangle &= \langle b|a\rangle^*; & (2.11) \\ \langle a|a\rangle &\geq 0; \\ (\langle a| \cdot (c|b\rangle)) &= c\langle a|b\rangle; \\ (\langle a| + \langle d|) \cdot (|b\rangle) &= \langle a|b\rangle + \langle d|b\rangle; \end{aligned}$$

onde c é um número complexo. A concordância entre estas propriedades e as propriedades dos kets e bras asseguram a existência de um produto interno.

Quando os kets de estados são ortonormais, ou seja, normalizados (norma igual a 1) e ortogonais, dizemos que estes pertencem ao *discreto*, se

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{i,j}. \quad (2.12)$$

Se pertencerem ao *contínuo* a relação de ortonormalização é uma distribuição representada pela delta de Dirac,

$$\langle x|y\rangle = \delta(x-y). \quad (2.13)$$

Podemos então demonstrar que autokets de operadores hermitianos são ortogonais, uma vez que tenham diferentes autovalores.

O produto interno de um autoket de um dado operador com os respectivos autobras do mesmo operador nos fornece uma delta de Kronecker ou de

Dirac, conforme vimos paragrafos acima, dependendo da natureza do espectro. O conjunto dos autokets de um operador hermitiano é dito completo, ou seja,

$$|\alpha\rangle = \int d\{a'\} \alpha(a') |a'\rangle, \quad (2.14)$$

onde $|\alpha\rangle$ é um ket arbitrário, $\alpha(a')$ é uma função peso dos rótulos $\{a'\}$ sendo que $\int d\{a'\}$ representa uma soma de Stieltjes sobre todos valores possíveis de a' , seja o espectro contínuo, discreto ou dois ao mesmo tempo (Leite Lopes, 1992; Leaf, 1982).

Os coeficientes de expansão $\alpha(a')$ estão associados à probabilidade de obtenção de cada resultado do resultado a' numa medida da grandeza A .

3 OS OPERADORES DE SCHWINGER

Neste capítulo apresentaremos o formalismo de Schwinger, introduzindo o conceito de operadores unitários. Consideremos sistemas quânticos caracterizados por espaços de Hilbert de dimensão finita N . Seja um conjunto de estados $\{|u_k\rangle\}$, associados a alguma grandeza física (spin, por exemplo), autoestados de um operador hermitiano arbitrário, formando portanto uma base completa e ortonormal no espaço de interesse. O índice k é um inteiro que varia de 0 a $N - 1$.

Agora iremos reproduzir o desenvolvimento original de Schwinger, detalhando porém passagens intermediárias. Definimos um operador V que atue nestes estados da forma:

$$V = |u_{N-1}\rangle \langle u_0| + \sum_{k=1}^{N-1} |u_{k-1}\rangle \langle u_k|. \quad (3.1)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima pode ser incluído na somatória mediante a convenção de notação

$$|u_j\rangle \equiv |u_{j(\bmod N)}\rangle. \quad (3.2)$$

A notação $j(\bmod N)$ significa a extração da parte inteira de j em relação a N . No Apêndice 1 encontramos uma compilação de resultados de aritmética módulo N , e a definição desta notação e suas propriedades. Desta forma, a equação (3.1) fica:

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} |u_{k-1}\rangle \langle u_k|. \quad (3.3)$$

Vamos atuar com V em um dos estados $|u_k\rangle$,

$$\begin{aligned} V |u_j\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} |u_{k-1}\rangle \langle u_k | u_j\rangle \\ V |u_j\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} |u_{k-1}\rangle \delta_{k,j}^{[N]}, \end{aligned}$$

onde $\delta_{k,j}^{[N]}$ é a delta de Krönecker, sendo que:

$$\delta_{k,j}^{[N]} = \begin{cases} 1, & k \equiv j(\bmod N) \\ 0, & k \not\equiv j(\bmod N). \end{cases} \quad (3.4)$$

$$V|u_j\rangle = |u_{j-1}\rangle, \quad (3.5)$$

Aplicando novamente o operador V em $|u_{j-1}\rangle$ teremos,

$$\begin{aligned} V|u_{j-1}\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} |u_{k-1}\rangle \langle u_k|u_{j-1}\rangle \\ V|u_{j-1}\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} |u_{k-1}\rangle \delta_{k,j-1}^{[N]} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$V|u_{j-1}\rangle = |u_{j-2}\rangle, \quad (3.7)$$

e vemos então que a ação do operador V é de deslocar em uma unidade o índice de um estado.

Atuando com outras potências de V , teremos:

$$V^2|u_j\rangle = V(V|u_j\rangle) \quad (3.8)$$

$$V^2|u_j\rangle = V|u_{j-1}\rangle \quad (3.9)$$

$$V^2|u_j\rangle = |u_{j-2}\rangle, \quad (3.10)$$

e em geral

$$V^s|u_j\rangle = |u_{j-s}\rangle, \quad (3.11)$$

onde s é um inteiro qualquer.

Escolhendo $s = N$ na equação acima, temos

$$V^N|u_j\rangle = |u_{j-N}\rangle.$$

Porém, como $j - N = j \pmod{N}$,

$$V^N|u_j\rangle = |u_j\rangle,$$

de onde podemos concluir que o operador V é cíclico, ou seja,

$$V^N = \hat{1}. \quad (3.12)$$

Iremos agora procurar pelos autoestados (e autovalores associados) do operador V , da forma

$$V|v_j\rangle = v_j|v_j\rangle.$$

Os autovalores de V podem ser facilmente obtidos se utilizarmos explicitamente a ciclicidade de V

$$\begin{aligned} V^N |v_j\rangle &= (v_j)^N |v_j\rangle \\ |v_j\rangle &= (v_j)^N |v_j\rangle, \end{aligned}$$

logo

$$(v_j)^N = 1,$$

ou seja, os autovalores de V são as N -ésimas raízes da unidade da forma

$$v_j = \exp \left[\frac{2\pi i}{N} j \right]; \text{ com } j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.13)$$

Para encontrarmos os autoestados de V fazemos

$$\begin{aligned} V |v_j\rangle &= v_j |v_j\rangle \\ V \sum_{k'=0}^{N-1} |u_{k'}\rangle \langle u_{k'} | v_j\rangle &= v_j \sum_{k=0}^{N-1} |u_k\rangle \langle u_k | v_j\rangle \\ \sum_{k'=0}^{N-1} |u_{k'-1}\rangle \langle u_{k'} | v_j\rangle &= \exp \left[\frac{2\pi i}{N} j \right] \sum_{k=0}^{N-1} |u_k\rangle \langle u_k | v_j\rangle, \end{aligned}$$

e se multiplicarmos esta equação por $\langle u_l |$

$$\begin{aligned} \sum_{k'=0}^{N-1} \underbrace{\langle u_l | u_{k'-1}\rangle}_{\delta_{l,k'-1}^{[N]}} \langle u_{k'} | v_j\rangle &= \exp \left[\frac{2\pi i}{N} j \right] \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\langle u_l | u_k\rangle}_{\delta_{l,k}^{[N]}} \langle u_k | v_j\rangle \\ \langle u_{l+1} | v_j\rangle &= \exp \left[\frac{2\pi i}{N} j \right] \langle u_l | v_j\rangle, \end{aligned}$$

e vemos que

$$\langle u_l | v_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[\frac{2\pi i}{N} j l \right], \quad (3.14)$$

onde o fator $\frac{1}{\sqrt{N}}$, assumido real, garante a normalização.

Podemos agora construir, a partir dos autoestados $|v_j\rangle$ um novo operador que atua no conjunto $\{|v_j\rangle\}$,

$$U = |v_n\rangle \langle v_0| + \sum_{k=1}^{N-1} |v_{k+1}\rangle \langle v_k|.$$

Da mesma forma que fizemos para V usando a convenção da notação da Eq. A.12, consideramos agora os autoestados $\{|v_j\rangle\}$,

$$|v_j\rangle = |v_{j \bmod N}\rangle. \quad (3.15)$$

Sendo assim, U toma a forma:

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} |v_{k+1}\rangle\langle v_k|.$$

Vamos atuar este operador em um dos autoestados de $\{|v_j\rangle\}$:

$$U|v_j\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |v_{k+1}\rangle\langle v_k|v_j\rangle$$

$$U|v_j\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |v_{k+1}\rangle\delta_{k,j}^{[N]}$$

$$U|v_j\rangle = |v_{j+1}\rangle,$$

ou seja, da mesma forma que V deslocava um estado $|u_j\rangle$ de j para $j-1$, U fará o contrário dentro dos estados $|v_j\rangle$, deslocando um estado $|v_j\rangle$ de j para $j+1$. Então,

$$U^2|v_j\rangle = U(U|v_j\rangle)$$

$$U^2|v_j\rangle = U|v_{j+1}\rangle$$

$$U^2|v_j\rangle = |v_{j+2}\rangle.$$

De modo geral, podemos escrever:

$$U^s|v_j\rangle = |v_{j+s}\rangle \quad (3.16)$$

Como anteriormente, fazendo $s = N$:

$$U^N|v_j\rangle = |v_{j+N}\rangle.$$

Analogamente ao que já vimos, $j+N \equiv j \pmod{N}$, portanto

$$U^N|v_j\rangle = |v_j\rangle,$$

e de maneira análoga a V , o operador U também é cíclico, ou seja,

$$U^N = \hat{1}. \quad (3.17)$$

Verificamos portanto que o par de operadores $\{U, V\}$ é cíclico. Porém, como vimos, cada um destes gera translações discretas na família dos autoestados do outro. A ciclicidade dos geradores de translação é uma característica do espaço vetorial discreto e finito.

Vamos agora procurar o autoestados e os autovalores para o operador U , usando a propriedade de ciclicidade do operador U :

$$U|x_j\rangle = x_j|x_j\rangle$$

$$U^N|x_j\rangle = (x_j)^N|x_j\rangle$$

$$(x_j)^N = 1,$$

sendo assim, os autovalores de U são também N -ésimas raízes da unidade da forma:

$$x_j = \exp\left[\frac{2\pi i}{N}j\right].$$

Os autoestados de U obedecem

$$U|x_j\rangle = x_j|x_j\rangle,$$

e expandindo os estados $\{|x_j\rangle\}$ na base dos $\{|v_k\rangle\}$ temos

$$U \sum_{k'=0}^{N-1} |v_{k'}\rangle \langle v_{k'}|x_j\rangle = x_j \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle \langle v_k|x_j\rangle$$

$$\sum_{k'=0}^{N-1} |v_{k'+1}\rangle \langle v_{k'}|x_j\rangle = \exp\left[\frac{2\pi i}{N}j\right] \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle \langle v_k|x_j\rangle.$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por $\langle v_l|$,

$$\sum_{k'=0}^{N-1} \underbrace{\langle v_l|v_{k'+1}\rangle}_{\delta_{l,k'+1}^{[N]}} \langle v_{k'}|x_j\rangle = \exp\left[\frac{2\pi i}{N}j\right] \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\langle v_l|v_k\rangle}_{\delta_{l,k}^{[N]}} \langle v_k|x_j\rangle.$$

Novamente, $\langle v_l | v_{k'+1} \rangle$ é identificado com $\delta_{l,k'+1}^{[N]}$ e $\langle v_l | v_k \rangle$ com $\delta_{l,k}^{[N]}$. Desta forma,

$$\langle v_{l-1} | x_j \rangle = \exp \left[\frac{2\pi i}{N} j \right] \langle v_l | x_j \rangle$$

$$\langle v_l | x_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[-\frac{2\pi i}{N} j l \right].$$

Porém

$$\langle x_j | v_l \rangle = (\langle v_l | x_j \rangle)^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[\frac{2\pi i}{N} j l \right], \quad (3.18)$$

de onde concluímos, por (3.14), que de fato $|x_j\rangle = |u_j\rangle$.

Com isso concluímos que as famílias de estados $\{|v_j\rangle\}$ e $\{|u_j\rangle\}$ estão conectadas através da forma discreta da transformada de Fourier, garantindo o máximo grau de incompatibilidade entre estas representações (SCHWINGER, 1970).

Quanto a isso, vemos que o módulo quadrado da norma não depende dos índices $\{j, l\}$

$$|\langle u_j | v_l \rangle|^2 = \frac{1}{N},$$

ou seja, se medirmos alguma grandeza que seja representada pelo conjunto $\{|u_j\rangle\}$ de autoestados, num sistema que se encontre em algum estado da família $\{|v_j\rangle\}$, a probabilidade de obtenção de qualquer um dos resultados associados aos autoestados da família $\{|u_j\rangle\}$ é $\frac{1}{N}$. Como existem exatamente N estados diferentes, estes estados são portanto estados de incerteza máxima, e o mesmo, naturalmente, é válido se invertermos os papéis de $\{|u_j\rangle\}$ e $\{|v_j\rangle\}$. Desta forma, vemos que os conjuntos de estados $\{|u_j\rangle\}$ e $\{|v_j\rangle\}$ guardam em si um grau máximo de incompatibilidade.

Resumindo, as relações obtidas até aqui:

$$V^s |u_n\rangle = |u_{n-s}\rangle, \quad U^s |v_n\rangle = |v_{n+s}\rangle; \quad (3.19)$$

$$U |u_k\rangle = \exp \left[\frac{2\pi i}{N} k \right] |u_k\rangle, \quad V |v_k\rangle = \exp \left[\frac{2\pi i}{N} k \right] |v_k\rangle; \quad (3.20)$$

$$\langle v_k | u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[-\frac{2\pi i}{N} k n \right]. \quad (3.21)$$

O par de operadores U e V é chamado de par de operadores unitários de Schwinger, e obedece a álgebra de Weyl (WEYL, 1978). Isto pode ser verificado a partir da ação destes operadores:

$$\begin{aligned} U^j |u_k\rangle &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}kj\right) |u_k\rangle \\ V^l |v_j\rangle &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}jl\right) |v_j\rangle. \end{aligned}$$

Combinando as equações acima com a ação de deslocamento dos operadores de Schwinger,

$$\begin{aligned} U^j V^l |u_j\rangle &= U^j |u_{j-l}\rangle \\ U^j V^l |u_{j'}\rangle &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(j'-l)j\right) |u_{j-l}\rangle \\ U^j V^l |u_{j'}\rangle &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}j'j\right) \exp\left(\frac{-2\pi i}{N}lj\right) |u_{j-l}\rangle, \end{aligned}$$

e como V^l agindo num estado $|u_{j'}\rangle$ desloca o índice deste em l unidades

$$U^j V^l |u_{j'}\rangle = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}j'j\right) \exp\left(\frac{-2\pi i}{N}lj\right) V^l |u_{j'}\rangle.$$

Ainda, é trivial perceber que $U^j |u_{j'}\rangle = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}j'j\right) |u_{j'}\rangle$, logo

$$U^j V^l |u_{j'}\rangle = V^l U^j \exp\left(\frac{2\pi i}{N}lj\right) |u_{j'}\rangle.$$

Como os estados $\{|u_{j'}\rangle\}$ formam uma base completa, podemos afirmar que:

$$U^j V^l = V^l U^j \exp\left(\frac{2\pi i}{N}lj\right), \quad (3.22)$$

e em conjunto com

$$V^N = U^N = 1$$

fica caracterizada a álgebra de Weyl.

4 LIMITE DO CONTÍNUO

Em geral, operadores unitários podem ser escritos de forma $e^{i\varepsilon X}$, onde X é um operador hermitiano e ε é um parâmetro real. Isso é válido para os operadores de Schwinger. Neste caso, os operadores hermitianos envolvidos possuirão uma estrutura algébrica que, como demonstraremos, permitirá relacionar seus autoestados e autovalores com dois pares canônicos: posição e momento linear, ângulo e momento angular (Ruzzi, 2002). Neste capítulo, iremos mostrar em detalhe como construir esta relação, que será obtida através de um processo de limite. Como um resultado paralelo desta discussão, abordaremos também a questão da normalização de vetores impróprios.

Começamos introduzindo um fator de escala dependente da dimensão do espaço dos autovetores:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}, \quad (4.1)$$

que ao fazermos $N \rightarrow \infty$ torna-se infinitesimalmente pequeno. Podemos definir também dois operadores hermitianos $\{P, Q\}$, na forma

$$P = \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} j\varepsilon^\delta p_0 |v_j\rangle\langle v_j| \quad Q = \sum_{j'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} j'\varepsilon^{2-\delta} q_0 |u_{j'}\rangle\langle u_{j'}| \quad (4.2)$$

através dos projetores associados aos autoestados de U e V . Os parâmetros p_0 e q_0 são introduzidos para levarem as unidades dimensionais de posição e momento linear. Já δ é um parâmetro livre dentro do intervalo aberto de $(0,2)$.

Os índices de soma ocorrem dentro de um intervalo simétrico, o que faz com que os espectros dos operadores estejam também dentro de um intervalo simétrico. Os intervalos para os projetores obedecem a convenção da extração de módulo N , conforme citado no Capítulo 3 e no Apêndice A. Isto garante uma varredura em todos os estados que compõe as respectivas bases $\{|u_k\rangle\}$ e $\{|v_k\rangle\}$.

Observando atentamente a atuação do operador P em um autoestado $|v_k\rangle$, vemos que o termo $\varepsilon^\delta p_0$ desempenha um papel de distanciamento entre os autovalores sucessivos de P . Assim,

$$\begin{aligned}
P|v_k\rangle &= \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} j\varepsilon^\delta p_0 |v_j\rangle \langle v_j|v_k\rangle \\
P|v_k\rangle &= \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} j\varepsilon^\delta p_0 |v_j\rangle \delta_{jk}^{[N]} \\
P|v_k\rangle &= k\varepsilon^\delta p_0 |v_k\rangle; \quad k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

O mesmo é válido para o operador Q ,

$$Q = k\varepsilon^{2-\delta} q_0 |u_k\rangle. \quad k = \frac{-N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}. \tag{4.4}$$

Logo, os espectros de P e Q são simétricos em torno de zero, respeitando os intervalos $\Delta p = \varepsilon^\delta p_0$ e $\Delta q = \varepsilon^{2-\delta} q_0$. É fácil notar que

$$\Delta p \Delta q = \varepsilon^2 = \frac{2\pi}{N}.$$

Podemos ainda reescrever a relação dos operadores de Schwinger $\{V, U\}$ com os operadores $\{P, Q\}$, levando em conta o fator de escala e os parâmetros dos autovalores,

$$\begin{aligned}
\exp\left[\frac{i\varepsilon^{2-\delta}}{p_0} P\right] |v_k\rangle &= \exp\left[\frac{i\varepsilon^{2-\delta}}{p_0} k\varepsilon^\delta p_0\right] |v_k\rangle \\
\exp\left[\frac{i\varepsilon^{2-\delta}}{p_0} P\right] |v_k\rangle &= \exp[\varepsilon^2 ik] |v_k\rangle; \\
\exp\left[\frac{i\varepsilon^{2-\delta}}{p_0} P\right] |v_k\rangle &= \exp\left[\frac{2\pi}{N} ik\right] |v_k\rangle = V |v_k\rangle,
\end{aligned}$$

logo

$$\exp\left[\frac{i\varepsilon^{2-\delta}}{p_0} P\right] = V, \tag{4.5}$$

como mencionado no início do capítulo e, complementarmente,

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{i\varepsilon^\delta}{q_0}Q\right]|u_k\rangle &= \exp\left[\frac{i\varepsilon^\delta}{q_0}k\varepsilon^{2-\delta}q_0\right]|u_k\rangle \\ \exp\left[\frac{i\varepsilon^\delta}{q_0}Q\right]|u_k\rangle &= \exp[ik\varepsilon^2]|u_k\rangle; \\ \exp\left[\frac{i\varepsilon^\delta}{q_0}Q\right]|u_k\rangle &= \exp\left[\frac{2\pi}{N}ik\right]|u_k\rangle = U|u_k\rangle,\end{aligned}$$

portanto,

$$\exp\left[\frac{i\varepsilon^\delta}{q_0}Q\right]|u_k\rangle = U. \quad (4.6)$$

Usamos os autovalores dos operadores $\{P, Q\}$ para rotular os conjuntos de autoestados simultâneos de $\{V, P\}$ e $\{U, Q\}$ através da relação

$$|v_j\rangle \equiv |p\rangle \quad |u_{j'}\rangle \equiv |q\rangle, \quad (4.7)$$

com

$$p = j\varepsilon^\delta p_0 \quad q = j'\varepsilon^{2-\delta}q_0. \quad (4.8)$$

Assim temos

$$P = \sum_{p=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0} p|p\rangle\langle p| \quad Q = \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0} q|q\rangle\langle q|. \quad (4.9)$$

Desta maneira, podemos reescrever a atuação dos operadores nos estados, uma vez que

$$V^s|u_{j'}\rangle = |u_{j'-s}\rangle,$$

e

$$\begin{aligned}|u_{j'}\rangle &\equiv |q\rangle, \quad q = j'\varepsilon^{2-\delta}q_0 \\ |u_{j'-s}\rangle &= |q''\rangle, \quad q'' = (j'-s)\varepsilon^{2-\delta}q_0,\end{aligned}$$

com as transformações acima podemos fazer

$$V^s |q\rangle = \exp \left[\frac{i\varepsilon^{2-\delta}}{p_0} P \right]^s |q\rangle = |q''\rangle$$

$$V^s |q\rangle = \exp \left[\frac{is\varepsilon^{2-\delta}}{p_0} P \right] |q\rangle = |q''\rangle.$$

Chamando $s\varepsilon^{2-\delta}q_0 = q'$

$$V^s |q\rangle = \exp \left[\frac{iq'}{q_0 p_0} P \right] |q\rangle = |q''\rangle$$

porém,

$$q'' = q_0 \varepsilon^{2-\delta} (j' - s)$$

$$q'' = q_0 \varepsilon^{2-\delta} j' - s q_0 \varepsilon^{2-\delta}$$

$$q'' = q - q',$$

então

$$\exp \left[\frac{iq'}{q_0 p_0} P \right] |q\rangle = |q - q'\rangle. \quad (4.10)$$

Analogamente,

$$\exp \left[\frac{ip'}{p_0 q_0} Q \right] |p\rangle = |p + p'\rangle. \quad (4.11)$$

Desta forma, reescrevemos as expressões onde os operadores de Schwin-ger agiam deslocando os rótulos dos conjuntos de autoestados $\{|u_j\rangle\}$ e $\{|v_j\rangle\}$ utilizando os novos operadores e rótulos introduzidos acima. Os deslocamentos agora são vistos como resultado da ação de uma exponencial de um operador hermitiano vezes um parâmetro de deslocamento, em analogia com os operadores usuais de translação de posição e momento linear,

$$\exp \left[\frac{-iP}{\hbar} \Delta x \right] |x\rangle = |x + \Delta x\rangle \text{ e } \exp \left[\frac{iX}{\hbar} \Delta p \right] |p\rangle = |p + \Delta p\rangle.$$

Lembramos que a expressão acima é válida para qualquer valor real de $p, \Delta p, x$ e Δx , sendo que as equações (4.27) e (4.28) valem apenas para valores dis-

cretos de $p, \Delta p, q$ e Δq , valendo ainda a convenção de extração módulo N , como ficará mais claro em uma discussão subsequente.

4.1 VETORES IMPRÓPRIOS

Utilizando os resultados obtidos na secção precedente, podemos escrever as resoluções da unidade nas variáveis transformadas

$$\sum_{p=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0} |p\rangle \langle p| = \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta} q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta} q_0} |q\rangle \langle q| = \hat{1}, \quad (4.12)$$

onde chamamos a atenção para os limites destas somas. As variáveis de soma varrem os espectros de tal forma que obedecem os intervalos de autovalor para autovalor com $\Delta p = \varepsilon^\delta p_0$ e $\Delta q = \varepsilon^{2-\delta} q_0$. Desta forma, as resoluções da unidade podem ser escritas como

$$\sum_{p=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0} \frac{\Delta p}{\varepsilon^\delta p_0} |p\rangle \langle p| = \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta} q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta} q_0} \frac{\Delta q}{\varepsilon^{2-\delta} q_0} |q\rangle \langle q| = \hat{1}.$$

Vamos definir autovetores que não são normalizados

$$|\widetilde{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^\delta p_0}} |p\rangle, \quad |\widetilde{q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{2-\delta} q_0}} |q\rangle. \quad (4.13)$$

Desta forma

$$\sum_{p=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0} \Delta p |\widetilde{p}\rangle \langle \widetilde{p}| = \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta} q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta} q_0} \Delta q |\widetilde{q}\rangle \langle \widetilde{q}| = \hat{1}. \quad (4.14)$$

O fato de $|\widetilde{p}\rangle$ e $|\widetilde{q}\rangle$ não serem normalizados não altera seu significado físico, conforme vimos no Capítulo 2 quando observamos que estes são, de fato, rays.

Vamos estudar o limite de $N \rightarrow \infty$. Observamos que existe uma dependência em N na norma destes autovetores não normalizados

$$|\langle \widetilde{p} | \widetilde{p} \rangle|^2 = \frac{1}{\varepsilon^\delta p_0}; \quad |\langle \widetilde{q} | \widetilde{q} \rangle|^2 = \frac{1}{\varepsilon^{2-\delta} q_0}, \quad (4.15)$$

e sendo $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}$, a norma em ambos os casos cresce com N

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^\delta} &\propto (\sqrt{N})^\delta, \\ \frac{1}{\varepsilon^\delta} &\propto N^{\frac{\delta}{2}}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^{2-\delta}} &\propto (\sqrt{N})^{2-\delta}, \\ \frac{1}{\varepsilon^{2-\delta}} &\propto N^{1-\frac{\delta}{2}},\end{aligned}\tag{4.17}$$

observando que como δ está num intervalo $(0, 2)$, as duas expressões acima são leis de potência positivas e crescem com N .

Para futura referência vamos olhar os casos extremos, por exemplo, quando $\delta = 2$

$$\frac{1}{\varepsilon^\delta} \propto N\tag{4.18}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{2-\delta}} \propto N^0 = 1,\tag{4.19}$$

nota-se que apenas uma das expressões acima cresce com N . Este resultado será retomado mais adiante.

Retornando ao caso δ no intervalo $(0, 2)$, vamos olhar para os limites de soma

$$\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0 = \frac{N-1}{2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \right)^\delta p_0,\tag{4.20}$$

logo

$$\frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0 \propto N^{1-\frac{\delta}{2}},$$

onde só observamos o termo que vai dominar no $\lim N \rightarrow \infty$, de forma que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{2}\varepsilon^\delta p_0 = \infty,\tag{4.21}$$

e analogamente,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{2} \varepsilon^{2-\delta} q_0 = \infty. \quad (4.22)$$

Tomamos também $\Delta p = \varepsilon^\delta p_0$ e $\Delta q = \varepsilon^{2-\delta} q_0$, e verificamos que no $\lim N \rightarrow \infty$, estas variações tornam-se infinitesimalmente pequenas, ou seja, podemos assumir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta p = dp; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta q = dq. \quad (4.23)$$

Desta forma, as resoluções da unidade podem ser reescritas da forma

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\widetilde{p}\rangle \langle \widetilde{p}|; \quad \hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dq |\widetilde{q}\rangle \langle \widetilde{q}|. \quad (4.24)$$

Os vetores $\{|\widetilde{p}\rangle\}$ e $\{|\widetilde{q}\rangle\}$ acima, como foi observado, terão norma tendendo ao infinito no limite considerado. Esta divergência decorre diretamente da introdução dos operadores de espectro contínuo, uma vez que sua norma cresce com a diminuição da distância entre sucessivos autovalores. Assim, também podemos reescrever as expressões dos operadores P e Q na forma de uma integração

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} p |\widetilde{p}\rangle \langle \widetilde{p}| dp; \quad Q = \int_{-\infty}^{\infty} q |\widetilde{q}\rangle \langle \widetilde{q}| dq. \quad (4.25)$$

Ainda é necessário estudar-se o comportamento das quantidades $\langle q' | q \rangle$, $\langle p' | p \rangle$ e $\langle p | q \rangle$. *Antes* do limite ser executado, tem-se que

$$\langle u_{kl} | u_k \rangle = \delta_{kl}^{[N]}; \quad \langle v_{kl} | v_k \rangle = \delta_{kl}^{[N]}, \quad (4.26)$$

e agora escrevemos estas expressões nas variáveis $\{p, q\}$, onde abandonaremos a notação diferenciada para os kets não normalizados, uma vez que a não-normalização fica clara no contexto.

$$\langle q' | q \rangle = \frac{1}{\varepsilon^{2-\delta} q_0} \delta_{q, q'} \quad - \frac{N-1}{2} \varepsilon^{2-\delta} q_0 < q, q' < \frac{N-1}{2} \varepsilon^{2-\delta} q_0, \quad (4.27)$$

$$\langle p' | p \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\delta p_0} \delta_{p, p'} \quad - \frac{N-1}{2} \varepsilon^\delta p_0 < p, p' < \frac{N-1}{2} \varepsilon^\delta p_0. \quad (4.28)$$

Lembramos que as deltas de Kroenecker acima ainda respeitam a condição de ciclicidade decorrente da notação módulo N . Uma vez que $N \rightarrow \infty$, são

válidos os resultados obtidos na discussão feita acima sobre a norma destes kets. Desta forma, as expressões acima divergirão para valores iguais dos argumentos e serão sempre iguais a zero para valores diferentes dos argumentos, indicando que estas superposições tendem ao comportamento da delta de Dirac. Para demonstrar o fato acima de maneira formal, seja a decomposição de um dado estado arbitrário da forma

$$|\psi\rangle = \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0} \psi(q) |q\rangle, \quad \Delta q = \varepsilon^{2-\delta}q_0, \quad (4.29)$$

onde $\psi(q) = \langle q | \psi \rangle \varepsilon^{2-\delta}q_0$, devido a não normalização dos estados da base $\{|q\rangle\}$. Multiplicando a expressão acima a esquerda por $\langle q' |$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle q' | \psi \rangle &= \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0} \psi(q) \langle q' | q \rangle \\ \frac{\psi(q')}{\varepsilon^{2-\delta}q_0} &= \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0} \psi(q) \langle q' | q \rangle \end{aligned} \quad (4.30)$$

e como $\Delta q = \varepsilon^{2-\delta}q_0$ obtemos finalmente

$$\psi(q') = \sum_{q=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^{2-\delta}q_0} \Delta q \psi(q) \langle q' | q \rangle.$$

No limite $N \rightarrow \infty$ obtemos

$$\psi(q') = \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi(q) \langle q' | q \rangle. \quad (4.31)$$

Com este resultado fica confirmado que de fato a superposição $\langle q' | q \rangle$ comporta-se como a quase-distribuição delta de Dirac. Ainda, é obtido naturalmente o resultado *imposto* em Leaf (1982), que as funções de onda sejam funções teste obedecendo uma expressão similar a (4.31).

Já a superposição das duas famílias de autoestados, toma a forma

$$\begin{aligned} \langle p | q' \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^\delta p_0}} \langle v_k | \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{2-\delta} q_0}} |u_{k'}\rangle \right) \\ \langle p | q' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 q_0 p_0}} \exp \left[\frac{2\pi i}{N} k k' \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi p_0 q_0}} \exp \left(\frac{ipq'}{p_0 q_0} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

de acordo com as definições acima.

Portanto, como após o limite a notação módulo N perde o sentido, ou melhor, a utilidade, é trivial perceber que todas as relações usuais são reobtidas a partir de suas contrapartes discretas

$$\begin{aligned} P|p\rangle &= p|p\rangle, & Q|q\rangle &= q|q\rangle; \\ \langle p'|p\rangle &= \delta(p' - p), & \langle q'|q\rangle &= \delta(q' - q); \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\langle p | q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi p_0 q_0}} \exp\left(\frac{ipq}{p_0 q_0}\right), \quad (4.34)$$

sendo o produto $p_0 q_0$ fixado em \hbar . Os fatores ε^δ e $\varepsilon^{2-\delta}$, como já dito, controlam, antes do limite, a distância entre dois autovalores ($p = j\varepsilon^\delta p_0$ e $q = j\varepsilon^{2-\delta} q_0$) sucessivos dos operadores P e Q . O resultado final porém, não depende destes fatores, o que implica que as variáveis canônicas de posição e momento linear são recuperadas de qualquer forma.

Para melhor ilustrar como os fatores ε^δ e $\varepsilon^{2-\delta}$ controlam estas distâncias, mostraremos alguns exemplos a seguir, fixando inicialmente o parâmetro δ variando N . Vamos iniciar esta discussão fixando $\delta = 1$ que, dissemos, equivale ao caso tratado por Schwinger. Tomando para este caso a variação dos autoestados em $N = 3, N = 5$ e $N = 7$ respectivamente, em unidade de p_0 e q_0 . Então, para $\delta = 1$ e $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}$, temos

j	p	q	j	p	q	j	p	q
			1	1,12	1,12	1	0,95	0,95
1	1,45	1,45	2	2,24	2,24	2	1,90	1,90
2	2,90	2,90	3	3,36	3,36	3	2,85	2,85
3	4,35	4,35	4	4,48	4,48	4	4,48	4,48
			5	5,60	5,60	5	4,75	4,75
						6	5,70	5,70
						7	6,65	6,65

A Figura 1 ilustra os diagramas dos espectros dos operadores P e Q .

Note que as distâncias entre os autovalores permanece a mesma quando alteramos o número de autoestados dos operadores P e Q . Além disso, o conjunto de autovalores adensam como mesma taxa. Isto demonstra que este distanciamento depende do parâmetro δ . Vamos agora fazer a variação deste parâmetro e verificar o que acontece com os espectros de autovalores dos operadores P e Q .

Para $\delta = 0.5$, temos

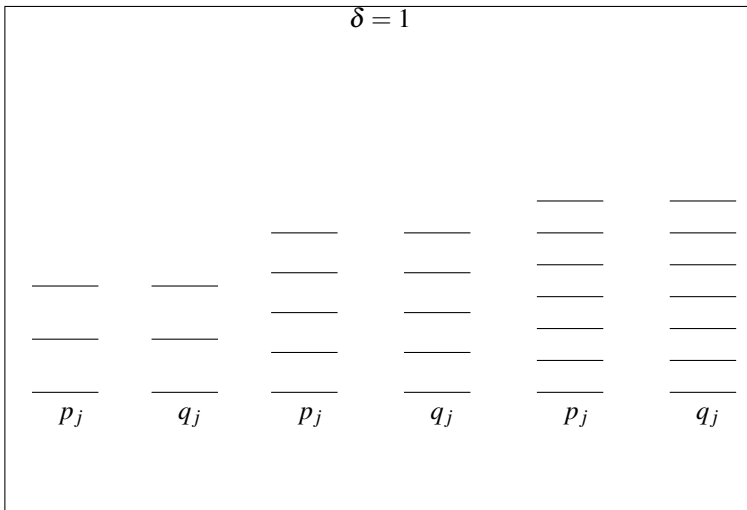


Figura 1: Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 1$, em unidades de p_0 e q_0 , para $N = 3$, $N = 5$ e $N = 7$.

j	p	q	j	p	q	j	p	q
1	1.21	1.75	1	1.06	1.20	1	0.98	0.92
2	2.42	3.50	2	2.12	2.40	2	1.96	1.84
3	4.35	5.25	3	3.18	3.60	3	2.94	2.76
			4	4.24	4.80	4	3.92	3.68
			5	5.30	6.00	5	4.90	4.60
						6	5.88	5.52
						7	6.86	6.44

E a Figura 2 ilustra os diagramas dos espectros dos operadores P e Q .

Observe que nas representações dos autoestados houve um rápido adensamento do conjunto dos autoestados de $\{p_j\}$.

Vamos escolher um novo valor para δ e verificar a nova relação, então para $\delta = 0.2$ temos

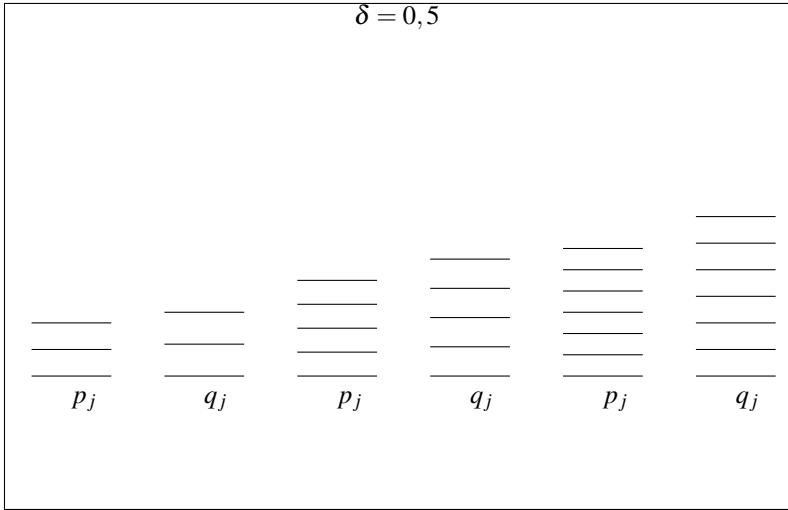


Figura 2: Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 0.5$, em unidades de p_0 e q_0 , para $N = 3, N = 5$ e $N = 7$.

j	p	q	j	p	q	j	p	q
1	1.08	1.96	1	1.03	1.23	1	0.99	0.92
2	2.16	3.92	2	2.06	2.46	2	1.98	1.84
3	3,24	5.88	3	3.09	3.69	3	2,97	2.76
			4	4.12	4.92	4	3.96	3.68
			5	5.15	6.15	5	4.95	4.60
						6	5.94	5.52
						7	6.93	6.44

Sendo sua representação mostrada na Figura 3.

Note que houve um adensamento maior dos autoestados de P enquanto que os autoestados de Q adensam de forma mais lenta. Agora vamos alterar o parâmetro δ para um valor próximo do limite superior e simetricamente ao parâmetro anterior ($\delta = 0.2$). Como a simetria ocorre em torno de um , este parâmetro é $\delta = 1.8$. Sendo seus valores

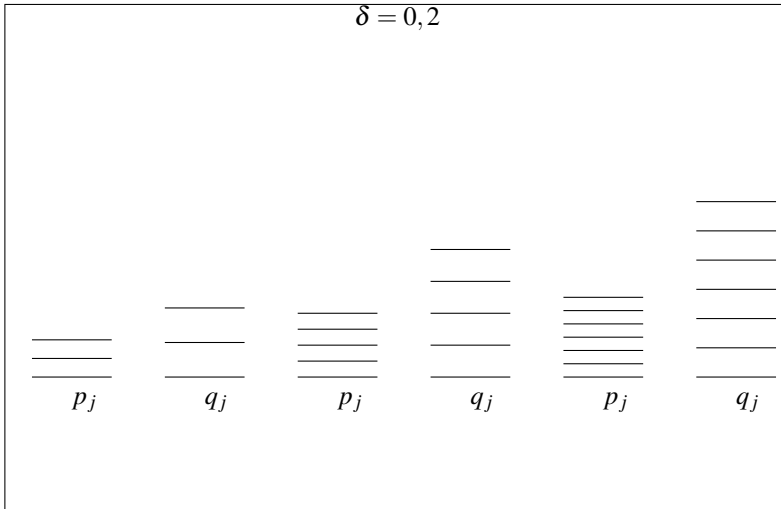


Figura 3: Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 0.2$, em unidades de p_0 e q_0 , para $N = 3$, $N = 5$ e $N = 7$.

j	p	q	j	p	q	j	p	q
1	1.96	1.08	1	1.23	1.03	1	0.92	0.99
2	3.92	2.16	2	2.46	2.06	2	1.84	1.98
3	5.88	3.24	3	3.69	3.09	3	2.76	2.97
			4	4.92	4.12	4	3.68	3.96
			5	6.15	5.15	5	4.60	4.95
						6	5.52	5.94
						7	6.44	6.93

Note que houve uma inversão dos valores de p e q devido a simetria. O mesmo ocorrerá para outros valores como $(0.5; 1.5)$, $(0.4; 1.6)$, e assim por diante. A Figura 4 ilustra a representação destes espectros.

Verificamos para estes exemplos que existe um rápido crescimento entre os autovalores de p e relação aos autovalores de q , na medida que o fator δ é próximo do limiter inferior, o inverso acontece quando este fator fica

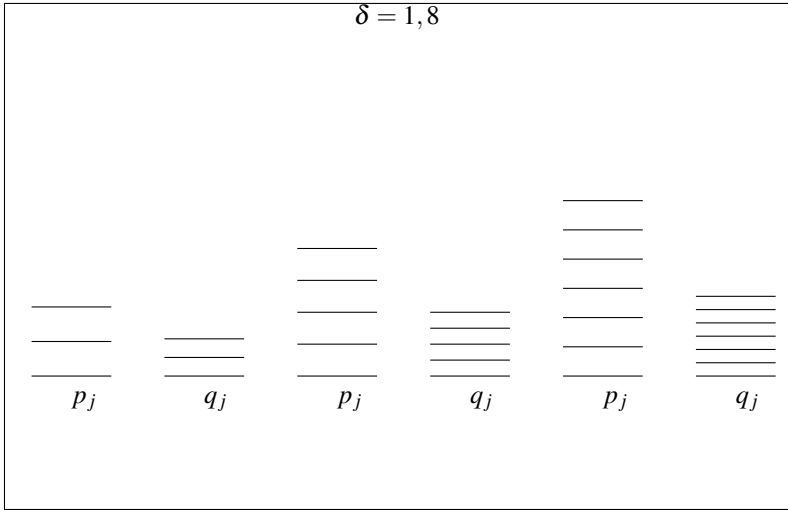


Figura 4: Espectro dos operadores P e Q para $\delta = 1.8$, em unidades de p_0 e q_0 , para $N = 3$, $N = 5$ e $N = 7$.

próximo do limite superior. Assim, fica claro que este fator é o responsável por controlar o distanciamento entre os autovalores sucessivos de p e q . De fato a medida que δ está acima ou abaixo de 1, acontece uma inversão nos valores de p e q fazendo que um adense mais rapidamente que o outro.

Verificamos que, como o espectro é linear, e que a medida que N cresce diminui a razão da progressão aritmética entre os sucessivos autovalores, fica explícito pelo adensamento do espectro dos autoestados.

4.2 O PAR CANÔNICO ÂNGULO E MOMENTO ANGULAR

Fazendo uma discussão análoga a da secção anterior, porém escolhendo o valor de delta nos extremos, $\delta = 0$ ou de maneira equivalente $\delta = 2$, temos que apenas um dos operadores fica dependente do parâmetro ε , assim

$$V = \exp\left[\frac{i\varepsilon^{2-\delta}}{p_0}M\right] \quad U = \exp\left[\frac{i\varepsilon^\delta}{q_0}\Theta\right], \quad (4.35)$$

$$V = \exp\left[\frac{i\varepsilon^2}{p_0}M\right] \quad U = \exp\left[\frac{i}{q_0}\Theta\right], \quad (4.36)$$

onde

$$M = \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} jm_0 |v_j\rangle\langle v_j| \quad \Theta = \sum_{j'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} j'\varepsilon^2\theta_0 |u_{j'}\rangle\langle u_{j'}|.$$

O par (m_0, θ_0) possui dimensões apropriadas, e os conjuntos de autovetores ficam desta forma

$$|v_j\rangle \equiv |m\rangle \quad |u_{j'}\rangle \equiv |\theta\rangle, \text{ sendo } m = jm_0 \text{ e } \theta = j'\varepsilon^2\theta_0.$$

As equações (4.18) e (4.19) indicam que, para o valor de $\delta = 0$, a introdução de kets não normalizados, neste caso, ocorrerá para apenas uma das duas famílias de autovetores. Portanto, introduzimos

$$|\widetilde{\theta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2\theta_0}} |\theta\rangle,$$

sendo as resoluções da unidade

$$\hat{1} = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}m_0}^{\frac{N-1}{2}m_0} |m\rangle\langle m|, \quad \hat{1} = \sum_{\theta=-\frac{N-1}{2}\varepsilon^2\theta_0}^{\frac{N-1}{2}\varepsilon^2\theta_0} \Delta\theta |\widetilde{\theta}\rangle\langle\widetilde{\theta}|,$$

com $\Delta m = m_0$.

Novamente precisamos observar os limites das somas acima, onde somente a soma nos valores de ângulo têm dependência com ε . Ainda, de acordo com (4.19)

$$\langle\widetilde{\theta}|\widetilde{\theta}\rangle = \frac{1}{\varepsilon^2\theta_0} \sim N. \quad (4.37)$$

Portanto, no limite de $N \rightarrow \infty$ a norma divergirá, e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta\theta = d\theta,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{2} \varepsilon^2 \theta_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \pi \theta_0 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi \theta_0}{N} = \pi \theta_0. \quad (4.38)$$

Ainda, fixando $\theta_0 = 1$ e $m_0 = \hbar$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{2} \varepsilon^2 = \pi. \quad (4.39)$$

e claramente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{2} m_0 = \infty, \quad (4.40)$$

Desta forma verificamos que apenas uma das somas torna-se uma integral pelo fato desta depender do fator de escala. As resoluções da unidade assumem assim a seguinte forma

$$\hat{1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m\rangle \langle m|, \quad \hat{1} = \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{\theta}\rangle \langle \widetilde{\theta}| d\theta. \quad (4.41)$$

De maneira análoga ao item anterior teremos

$$M = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m |m\rangle \langle m|, \quad \Theta = \int_{-\pi}^{\pi} \theta |\widetilde{\theta}\rangle \langle \widetilde{\theta}| d\theta. \quad (4.42)$$

Como apenas a família dos $\{|\widetilde{\theta}\rangle\}$ se tornará uma família de vetores impróprios, então temos,

$$\Theta |\theta\rangle = \theta |\theta\rangle, \quad \langle \theta' | \theta \rangle = \delta(\theta' - \theta); \quad \text{com } -\pi \leq \theta < \pi \quad (4.43)$$

$$M |m\rangle = m |m\rangle, \quad \langle m' | m \rangle = \delta_{m',m}. \quad (4.44)$$

$$\langle m | \theta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i\theta m}{\hbar}\right). \quad (4.45)$$

A convenção de extração de módulo N perde o sentido para os estados $\{|m\rangle\}$. Para entender a relação da extração de módulo N com os estados $\{|\theta\rangle\}$, lembramos primeiramente a relação dos estados $|u_{j'}\rangle \equiv |\theta\rangle$ com $\theta = j'\varepsilon^2$. Devemos lembrar que os índices dos estados $|u_{j'}\rangle$, pela convenção de extração de módulo N , variam dentro do intervalo $[0, N-1]$, o que resulta numa variação de θ dentro do intervalo simétrico $[-\frac{N-1}{2}\varepsilon^2, \frac{N-1}{2}\varepsilon^2]$ devido a definição de θ .

Desta forma quando j' está fora do intervalo que define a primeira determinação de N , através da extração de módulo N , temos

$$j' = j + IN, \quad (4.46)$$

de acordo com o que foi dito no Capítulo 2 e apêndice 1, onde I é um inteiro qualquer, e $j \in [0, N - 1]$. Quando

$$\theta' = j'\varepsilon^2,$$

então

$$\theta' = j\varepsilon^2 + \varepsilon^2 IN, \quad (4.47)$$

o primeiro termo do lado direito da equação acima, no limite $N \rightarrow \infty$, resultará num ângulo entre $[\pi, -\pi]$ de acordo com a Eq. 4.39. Fazendo o limite de $\varepsilon^2 IN$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon^2 IN = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi I = 2\pi I, \quad (4.48)$$

então, após o limite

$$\theta' = \theta + 2\pi I, \quad \text{onde } \theta \in (0, 2\pi). \quad (4.49)$$

Portanto a relação

$$|u_{j'}\rangle \equiv |u_{j'(\text{mod } N)}\rangle,$$

implica em

$$|\theta'\rangle \equiv |\theta'_{(\text{mod } 2\pi)}\rangle \quad (4.50)$$

resultando naturalmente numa extração de módulo 2π , que é a condição de contorno para a variável de ângulo.

4.3 COMUTADOR

Nesta seção estudaremos o comportamento das relações de comutação entre os pares dos operadores canônicos $[Q, P]$ e $[M, \Theta]$. Esta discussão é pertinente, uma vez que é bem sabido que o comutador dos pares de operadores complementares se comporta de maneira diferente nas duas situações onde há análogo clássico, ou seja, para os pares de momento linear e posição e momento angular e ângulo.

Primeiramente, vamos calcular o elemento de matriz do comutador $[Q, P]$ na base dos autovetores não-normalizados $\{|q\rangle\}$. Sendo assim,

$$\langle q_1 | [Q, P] | q_2 \rangle, \quad (4.51)$$

e usando as decomposições espectrais, dadas na Eq. 4.25

$$\langle q_1 | \left(\sum_{q_3} q_3 |q_3\rangle \langle q_3| \Delta q_3 \sum_p p |p\rangle \langle p| \Delta p - \sum_p p |p\rangle \langle p| \Delta p \sum_{q_3} q_3 |q_3\rangle \langle q_3| \Delta q_3 \right) | q_2 \rangle, \quad (4.52)$$

e juntando os somatórios:

$$\sum_{q_3, p} (\langle q_1 | q_3 \rangle \langle q_3 | p \rangle \langle p | q_2 \rangle - \langle q_1 | p \rangle \langle p | q_3 \rangle \langle q_3 | q_2 \rangle) q_3 p \Delta q_3 \Delta p.$$

Sabendo que :

$$\langle q_j | | q_k \rangle = \frac{1}{\varepsilon^{2-\delta} q_0} \delta_{q_j q_k}, \quad (4.53)$$

$$\langle q_j | | p_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi p_0 q_0}} \exp \left[\frac{-i q_j p_k}{p_0 q_0} \right], \quad (4.54)$$

e sendo $\Delta q_3 = \varepsilon^{2-\delta} q_0$, após a soma em $\{q_3\}$ temos:

$$\sum_p \frac{1}{\varepsilon^{2-\delta} q_0} \frac{1}{2\pi p_0 q_0} \left(\exp \left[\frac{i p (q_2 - q_1)}{p_0 q_0} \right] q_1 - \exp \left[\frac{i p (q_2 - q_1)}{p_0 q_0} \right] q_2 \right) p \Delta p \varepsilon^{2-\delta} q_0 \quad (4.55)$$

$$= \sum_p \frac{1}{2\pi p_0 q_0} (q_2 - q_1) \exp \left[\frac{-i p (q_2 - q_1)}{p_0 q_0} \right] p \Delta p, \quad (4.56)$$

fazendo $p_0 q_0 = \hbar$ e $N \rightarrow \infty$, com ε entre $(0, 2)$

$$\frac{1}{2\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} (q_2 - q_1) \exp \frac{-i p (q_2 - q_1)}{\hbar} p dp. \quad (4.57)$$

O termo $\int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{-i p (q_2 - q_1)}{\hbar} p dp$, é uma das formas de escrevermos a derivada da quase-distribuição delta de Dirac (Leite Lopes, 1992). Desta forma, se usarmos o fato de conhecermos o resultado desta integral e integrarmos a expressão acima com uma função teste $f(q_1)$, teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(q_1)(q_2 - q_1)\{-i\hbar\delta'(q_1 - q_2)\}dq_1. \quad (4.58)$$

Podemos resolver esta integral, sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(q_1)\delta'(q_2 - q_1) dq_1 = -f'(q_2), \quad (4.59)$$

e que menos a derivada de $f(q_1)(q_2 - q_1)$ é

$$-\frac{\partial}{\partial q_1} (f(q_1)(q_2 - q_1)) \quad | \quad q_1=q_2 \quad (4.60)$$

$$-[f'(q_1)(q_2 - q_1) - f(q_1)] \quad | \quad q_1=q_2 = f(q_2), \quad (4.61)$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(q_1)(q_2 - q_1)\{-i\hbar\delta'(q_1 - q_2)\}dq_1 = f(q_2). \quad (4.62)$$

Portanto, a integração da quase distribuição dada pela eq. 4.57 com uma função teste mostra que esta se comporta como a delta de Dirac, logo,

$$\langle q_1 | [Q, P] | q_2 \rangle = i\hbar\delta(q_1 - q_2). \quad (4.63)$$

O resultado obtido acima é o resultado familiar do caso contínuo, decorrência direta de $[Q, P] = i\hbar I$. O fato do comutador entre dois operadores ser proporcional ao operador identidade é uma característica do caso contínuo de posição e momento linear. Esta característica não se repete para o caso de momento angular e ângulo, como veremos abaixo.

Para tratarmos o caso angular, já vimos que devemos escolher o valor do parâmetro δ em um dos extremos do intervalo $(0, 2)$. Escolhendo valor de $\delta = 2$, a expressão análoga à eq. 4.51 será

$$\langle m_1 | [M, \Theta] | m_2 \rangle. \quad (4.64)$$

Da mesma forma ao que foi feito para o caso do par canônico posição e momento, usamos as decomposições espectrais,

$$\langle m_1 | \left(\sum_{m_3} m_3 | m_3 \rangle \langle m_3 | \sum_{\theta} \theta | \theta \rangle \langle \theta | \Delta m \Delta \theta - \Delta m \Delta \theta \sum_{\theta} \theta | \theta \rangle \langle \theta | \sum_{m_3} m_3 | m_3 \rangle \langle m_3 | \right) | m_2 \rangle, \quad (4.65)$$

e juntando os somatórios:

$$\sum_{m_3, \theta} (\langle m_1 | m_3 \rangle \langle m_3 | \theta \rangle \langle \theta | m_2 \rangle - \langle m_1 | \theta \rangle \langle \theta | m_3 \rangle \langle m_3 | m_2 \rangle) m_3 \theta \Delta m \Delta \theta,$$

como:

$$\langle m_j | m_k \rangle = \frac{1}{\varepsilon^{2-\delta} m_0} \delta_{m_j m_k}, \quad (4.66)$$

$$\langle m_j | \theta_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_0 m_0}} \exp\left(\frac{-im_j \theta_k}{\theta_0 m_0}\right), \quad (4.67)$$

$$\Delta m = m_0 \quad (4.68)$$

temos:

$$\sum_{\theta} \theta \frac{1}{\varepsilon^{2-\delta} m_0} \frac{1}{2\pi\theta_0 m_0} \left(\exp\left[\frac{i\theta(m_2 - m_1)}{\theta_0 m_0}\right] m_1 \right. \quad (4.69)$$

$$\left. - \exp\left[\frac{i\theta(m_2 - m_1)}{\theta_0 m_0}\right] m_2 \right) m_0 \Delta \theta \varepsilon^{2-\delta}$$

$$= \sum_{\theta} \frac{1}{2\pi\theta_0 m_0} (m_2 - m_1) \exp\left[\frac{-i\theta(m_2 - m_1)}{\theta_0 m_0}\right] \theta \Delta \theta, \quad (4.70)$$

lembrando que quando $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta \theta = d\theta, \quad (4.71)$$

e ainda,

$\theta_0 = 1$, $m_0 = \hbar$, e com $\delta = 2$, poderemos realizar a integração no ângulo θ ,

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\pi}^{\pi} (m_2 - m_1) \exp\left[\frac{-i\theta(m_2 - m_1)}{\hbar}\right] \theta d\theta = i \cos[\pi(m_2 - m_1)] \quad (4.72)$$

$$\langle m_1 | [M, \Theta] | m_2 \rangle = i \cos[\pi(m_2 - m_1)]. \quad (4.73)$$

Portanto, ficou explícito que a relação de comutação $[Q, P] = i\hbar I$, é uma peculiaridade do caso com análogo clássico de posição e momento linear.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo básico desta dissertação foi o de discutir alguns aspectos de diferentes situações descritas pela Mecânica Quântica, nas abordagens discreta e na contínua. Como vimos, há dois tipos de graus de liberdade presentes nas descrições quânticas de sistemas físicos. É possível estabelecer uma conexão entre variáveis canônicas, definidas em graus de liberdades com análogo clássico, e aqueles definidos com graus de liberdades sem análogo clássico. Esta dissertação mostrou e discutiu os resultados desta analogia. Esta peculiar conexão revela muito da estrutura da teoria e permitem discutir tanto aspectos comuns como os não-comuns dos conceitos físicos em ambos os contextos. Convém ressaltar que estas diferenças, entre os casos contínuos e discretos, nem sempre estão explícitas. Como na abordagem de Dirac que mascara quase que por completo estas diferenças.

Um dos aspectos relevantes dentro da Mecânica Quântica, são os seus diferentes formalismos, por exemplo, o ondulatório, matricial ou de Dirac. Tanto o formalismo ondulatório como o matricial, apesar de historicamente terem sido desenvolvidos visando a descrição de graus de liberdades com análogo clássico, podem ser adaptados a descrição de graus de liberdades sem análogo clássico. Nossa opção pelo formalismo de Dirac para tratar as particularidades citadas acima, é fundamentada no fato deste formalismo ter um forte caráter abstrato, que permite a este incluir as abordagens ondulatórias e matriciais e naturalmente adaptar aos contextos discretos ou contínuos. Porém, o preço desta generalidade é como já citamos, o de mascarar as diferenças existentes entre os outros formalismos e contextos citados. Neste sentido, torna-se extremamente pertinente, usar de uma abordagem que permita rapidamente identificar aspectos de um ou outro contexto.

Para ilustrar a discussão acima - e os próprios objetivos desta dissertação - destacamos que os textos mais modernos de Mecânica Quântica - voltados a um público de pós-graduação - utilizam largamente o formalismo de Dirac, tanto no contexto discreto como no contínuo. É possível, portanto, que aos olhos daqueles em um primeiro contato com uma elaboração mais formal da Mecânica Quântica, as únicas diferenças entre os contextos discreto e contínuo sejam meramente substituir integrais por somatórios e ainda um detalhe quanto a normalização.

Para tratarmos o caso discreto, seguimos a abordagem de Schwinger para construirmos o chamado par de operadores unitário de Schwinger, que atuam em espaços de dimensão finita. Assim, os operadores unitários de Schwinger $\{V, U\}$ são construídos levando-se em conta autoestados cujos índices estão dentro primeira determinação da congruência módulo N . Esta

notação - congruência módulo N - que aparece dentro do corpo da abordagem, foi introduzida de modo a apresentar apenas seus aspectos e propriedades principais em anexo.

Esta estrutura da abordagem de Schwinger permite relacionar seus autoestados e autovalores com os pares canônicos. Porém, é necessário a construção desta conexão, que como vimos torna possível explorar com mais detalhes aspectos, como o processo de normalização de vetores impróprios e o processo de limite entre o discreto e o contínuo. Para o processo de limite, um dos aspectos relevantes, é a introdução de um fator de escala. Na primeira parte da discussão onde o parâmetro δ é livre, dentro de um intervalo fechado de $(0, 2)$, inicialmente as variáveis discretas posição e momento linear estão dentro de um intervalo finito. O parâmetro δ , controla a distância entre sucessivos autovalores dos operadores hermitianos P e Q . O limite do contínuo destas variáveis é o par canônico posição e momento linear. Este limite acontece para qualquer valor de δ , no intervalo de fechado entre $(0, 2)$. Ressaltamos que Schwinger ter abordado este problema numa situação equivalente a de $\delta = 1$ (Schwinger, 1960). Procuramos explorar um pouco mais esta discussão, observando como comportavam-se o espectro dos autovalores de P e Q para δ próximos dos limites inferior e superior. Usamos para isso uma representação gráfica que ajudasse a visualizar como o parâmetro δ controla o distanciamento dos autovalores para diferentes tamanhos de autoestados (N). Ficou visivelmente claro que acontece um adesamento nos autoestados entre um ou outro limite. Nota-se que ao aproximar-se do limite inferior os espectros do conjunto $\{p_j\}$ adensam mais rapidamente que o conjunto $\{q_j\}$, apesar de N convergir para o infinito.

Na segunda parte nos consideramos $\delta = 0$, observando um extremo do intervalo. As variáveis são alteradas de forma a estarem adequadas a descrição do par canônico ângulo e momento angular. O limite contínuo neste caso só afeta uma das variáveis, onde uma delas assume valores discretos e a outra assume valores contínuos. A primeira coisa interessante quanto ao parâmetro δ é que neste caso, o par canônico ângulo e momento angular, é um caso limite do par canônico posição e momento linear. Outro aspecto interessante, é que para um número finito de estados, não há distinção fundamental entre coordenadas angulares ou cartesianas, ou melhor, entre as variáveis que poderiam ser identificadas com coordenadas angulares e cartesianas depois do limite estabelecido, uma vez que podemos conectar estas com uma simples transformação de variáveis. Ou seja, uma transformação que leve das variáveis definidas na Eq. 3.16 às variáveis na Eq. . A possibilidade desta transformação só é perdida depois do processo de limite ser exercitado.

Uma discussão imprescindível feita, foi quanto aos vetores impróprios. Estes vetores aparecem dentro da formulação da Mecânica Quântica que tra-

balha no corpo dos números reais, além disso na descrição de graus de liberdade com análogo classico estes tem papel fundamental. Sua norma apresenta divergência, o que é um problema com bastante relevância. Esta divergência aparece na introdução dos operadores de espectro contínuo. No nosso caso, o fato dos kets serem tratados como *rays*, permite que a introdução de vetores impróprios aconteça, porém, de maneira natural.

Vetores impróprios, em principio, não fazem parte do espaço de Hilbert. Apesar disto, seu papel fica mais claro, e mais integrado ao contexto, quando visto como resultado do processo de limite. A discussão presente, além de deixar clara por que a dualidade entre kets e bras é ordinariamente vista como aquela entre vetores normais num espaço de dimensão finita, pode servir como ponto de partida para uma nova definição de dualidade, valendo-se dos limites indutivos, uma vez que é fato que cada elemento de um espaço de Hilbert usual pode ser visto como um limite de uma seqüência de elementos de espaços finitos (RUZZI, em preparação; CATTANEO & WRESZINSKI, 1999; BARKER, 2001a,2001b,2001c).

APÊNDICE A – Congruências

No Capítulo 2 desta dissertação introduzimos, de maneira rápida e objetiva, a definição de congruência de números inteiros. Naquele momento tínhamos a necessidade de observar a congruência com relação aos índices dos autoestados dos operadores de Schwinger. Nesta seção, mostraremos as definições e propriedades das congruências imediatamente ligadas ao formalismo envolvido na dissertação (ALENCAR, 1987; ANDREWS, 1971). Portanto, deixamos de efetuar provas e demonstrações, partindo direto para os exemplos e buscando um caráter mais didático.

A.1 DEFINIÇÃO: INTEIROS CONGRUENTES

Dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se sua diferença for divisível por outro número inteiro m , tendo como resultado um número k , também inteiro. Desta forma

$$\frac{a - b}{m} = k, \quad (\text{A.1})$$

e diz-se então que a é congruente a b módulo m . Para tanto, adota-se a seguinte notação

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (\text{A.2})$$

Simbolicamente,

$$a \equiv b \pmod{m} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid a - b = km.$$

Dizemos ainda que dois inteiros a e b são congruentes módulo m se e somente se eles deixam o mesmo resto quando divididos por m .

Como exemplo de como podemos relacionar inteiros a partir desta definição, consideremos $m = 6$, temos

$$\begin{aligned} -31 &\equiv 11 \pmod{6}, \\ 3 &\equiv 9 \pmod{6}, \\ 6 &\equiv 0 \pmod{6}. \end{aligned}$$

Decorre da razão descrita em A.1, a definição de incongruência:

$$\frac{a - b}{m} \neq k, \quad (\text{A.3})$$

ou seja,

$$a \not\equiv b \pmod{m} \quad (\text{A.4})$$

A seguir citaremos algumas propriedades e exemplos. Sendo m um inteiro positivo fixo e (a, b, c, d, \dots, z) um conjunto de inteiros quaisquer:

1.

$$a \equiv a \pmod{m}; \quad (\text{A.5})$$

Exemplo: $2 \equiv 2 \pmod{3}$.

2.

$$a \equiv b \pmod{m}, \text{ então } b \equiv a \pmod{m}; \quad (\text{A.6})$$

Exemplo: $-1 \equiv 2 \pmod{3}$ então $2 \equiv -1 \pmod{3}$.

3.

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ e se } b \equiv c \pmod{m}, \text{ então } a \equiv c \pmod{m}; \quad (\text{A.7})$$

Exemplo: $-1 \equiv 2 \pmod{3}$, e $2 \equiv 5 \pmod{3}$, então $-1 \equiv 5 \pmod{3}$.

4.

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ e se } \frac{n}{m}, \text{ com } n > 0, \text{ então } a \equiv b \pmod{n}; \quad (\text{A.8})$$

Exemplo: $35 \equiv -40 \pmod{15} \Leftrightarrow 35 \equiv -40 \pmod{5}$.

5.

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ e se } c > 0, \text{ então, } ac \equiv bc \pmod{mc}; \quad (\text{A.9})$$

Exemplo: $-2 \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow -4 \equiv 2 \pmod{6}$.

6.

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ e } c \equiv d \pmod{m}, \text{ então } a + c \equiv b + d \pmod{m}; \quad (\text{A.10})$$

Exemplo: $-2 \equiv 1 \pmod{3}$ e $4 \equiv 1 \pmod{3}$, então $2 \equiv 2 \pmod{3}$.

7.

$$a \equiv b \pmod{m}, \text{ então } a^n \equiv b^n \pmod{m} \text{ para todo inteiro } n > 0; \quad (\text{A.11})$$

Exemplo: $4 \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow 8 \equiv 1 \pmod{3}$.

Assim sendo, no Capítulo 3 desta dissertação foi introduzido a notação

$$|u_j\rangle \equiv |u_{j(\bmod N)}\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Onde $(j \bmod N)$ significa a extração da parte inteira de j em relação a N . Em outras palavras, devemos encontrar um inteiro congruente a j que esteja dentro da *primeira determinação de módulo N* de j . Assim, existe

$$j = j' + IN, \quad (\text{A.13})$$

onde

$$0 \leq j' \leq N, \quad (\text{A.14})$$

e I é a parte inteira de j com relação a $N - (I_j^N)$. Desta forma,

$$5 \equiv 8 \pmod{3}, \quad (\text{A.15})$$

pois podemos escrever

$$8 = 5 + 1 \times 3. \quad (\text{A.16})$$

Esta notação está de acordo com as propriedades acima apresentadas que fundamentam as relações de congruência. Para mais aprofundamento ver referência citada neste Apêndice.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alencar, E. F. *Teoria Elementar dos Números*, Capítulo 9, São Paulo: Nobel, 1987.
- Andrews, G. E. *Number Theory*, Philadelphia: W. B. Saunders, 1971.
- Barker, L. J. *Funct. Anal.* **186**, 153, 2001a.
- Barker, L. J. *Math. Phys.* **42**, 4653, 2001b.
- Barker, L. J. *Phys A: Math. Gen.* **22**, 4673, 2001c.
- Cattaneo, U.; Wreszinski, W. F. *Rev. Math. Phys.* **11**, 1179, 1999.
- Dirac, P. A. M. *Quantum Mechanics*. Oxford Univ. Press, 1958.
- Leaf, B. *Found. of Physics* **12**, 583, 1982.
- Leite Lopes, J. *A Estrutura Quântica da Matéria*, Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 1992.
- Ruzzi, M. J. *Phys. A: Math Gen.* **35**, 1763, 2002.
- Ruzzi, M. *The ket-bra symmetry on Hilbert Spaces*, em preparação.
- SAKURAI, J. J. (Jun John). *Modern Quantum Mechanics*. Rev. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.
- Schwinger, J. *Quantum Kinematics and Dynamics*, Benjamin, New York, 1970.
- Schwinger, J. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **46**, 570, 1960.
- SHANKAR, Ramamurti. *Principles of Quantum Mechanics*. 2nd ed. New York: Plenum, 1994.
- Weyl, H. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover, New York, 1978.